CHAPITRE 7

Jeux sous forme extensive

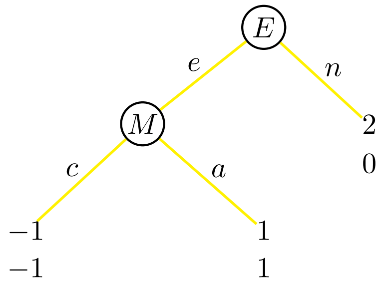
Les jeux sous forme normale donne une représentation adéquate de joueurs effectuant des choix de stratégies simultanés. Dans ces jeux, aucun jouer n'a d'information sur les stratégies utilisées par les autres au moment de faire ses choix. Dans de nombreux cas concrets, les joueurs effectuent leurs choix en fonction d'une situation observée qui dépend en particulier des choix précédents des autres joueurs. Par exemple c'est le cas pour une enchère croissante, dans une négociation, ou dans le jeu d'échecs...

Pour représenter ces possibilités, nous allons généraliser la représentation sous forme d'arbres et les ensembles d'information vus au chapitre de la décision dynamique. La seule différence est que nous avons plusieurs joueurs là où nous n'avions qu'un seul agent.

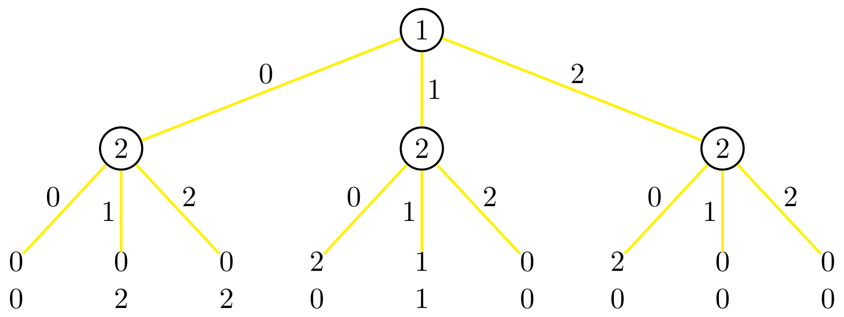
1. Exemples préliminaires

Nous traitons une série d'exemples avant de définir la notion de jeu sous forme extensive.

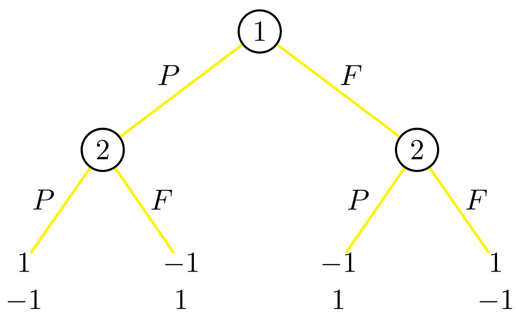
1.1. Jeu d'entrée. Une firme M est en situation de monopole sur un marché. Une autre firme E peut décider d'entrer (e) ou non (n) sur le marché. Si la firme E décide d'entrer, la firme M peut alors soit combattre (c), soit s'accommoder (a). Les paiements pour M et pour A sont $(2,0)$ si E n'entre pas, $(-1,-1)$ si E entre et M combat, et $(1,1)$ si E entre et M s'accommode. On représente ce jeu par l'arbre suivant :



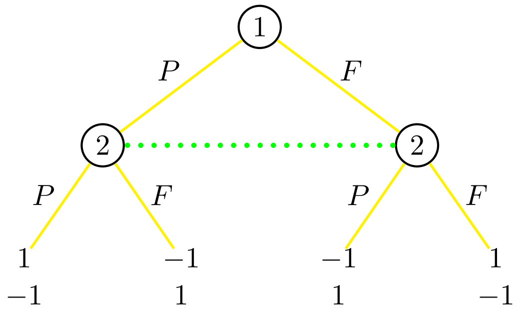
1.2. Compétition de Stackelberg. Supposons qu'une firme, 1, ait la possibilité de choisir son niveau de production q_1 avant que la firme 2 ne fixe le sien q_2. Pour fixer les idées, supposons que $q_i \in \{0, 1, 2\}$, que la fonction de demande est $p = \max\{3 - q_1 + q_2, 0\}$, et que le coût de production est nul pour chaque firme. On représente ce jeu par l'arbre suivant :



1.3. Pile ou face. Le joueur 1 choisit pile ou face, puis le joueur 2 choisit pile ou face. Le joueur 2 gagne si les choix sont égaux, et perd si les choix sont différents (c'est un jeu à somme nulle). On représente ce jeu par l'arbre suivant :

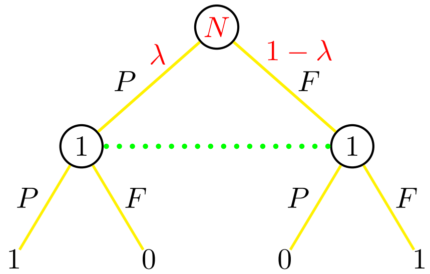


1.4. Pile ou Face sans observation. On suppose maintenant que 2 ne connaît pas le choix de 1 lorsqu'il effectue son choix. Ceci peut être représenté à l'aide d'un ensemble d'information :



L'ensemble d'information du joueur 2 comprend ses deux nœuds de décision. Ceci signifie que le joueur 2 ne différencie pas ces deux nœuds. Il doit effectuer un choix indépendant de celui effectué précédemment par le joueur 1.

1.5. Pile ou Face contre la nature. Cette fois ci, il n'y a pas de joueur 2, mais le joueur 1 joue contre la Nature qui tire une pièce de monnaie, Pile ou Face, avec probabilités λ et $1-\lambda$.



N représente la nature. On a représenté les probabilités $\lambda, 1-\lambda$ des choix pouvant être faits par la nature.

2. Jeu sous forme extensive Γ

Voici la définition formelle d'un jeu sous forme extensive. On ne demandera pas de la connaître par cœur. Cependant, il est important de savoir reconnaître un tel jeu et de savoir représenter une situation stratégique par un jeu sous forme extensive.

DÉFINITION 1. *Un jeu sous forme extensive Γ est donné par :*
- *I ensemble fini de joueurs, $N \notin I$ (nature) ;*
- *T ensemble fini de nœuds, $Z \subset T$ nœuds terminaux, et pour $t \notin Z$:*
  - *Le joueur ou la nature $i(t) \in \{N\} \cup I$ qui joue en t ;*
  - *L'ensemble de choix possibles $A(t)$;*
  - *Le nœud successeur résultant du choix a, $N(t,a)$;*
  - *Une distribution $D(t)$ sur $A(t)$ si $i(t) = N$.*

– *$u_i : Z \to \mathbb{R}$ fonctions d'utilité de i ;*
– *$h(t)$ classe d'équivalence de t pour l'information :*

$$x' \in h(x) \Rightarrow i(x') = i(x),\ \ A(x') = A(x), h(x') = h(x)$$

Afin que le jeu ait une structure d'arbre, on requiert que les éléments vérifient les propriétés suivantes.

– *$s(t) = \{N(t,a), a \in A(t)\}$ ensemble des successeurs directs de t. ($\emptyset$ si $t \in Z$).*
– *$S(t) = s(t) \cup s(s(t)) \cup s(s(s(t)))$... tous les successeurs de t.*
– *Il n'y a pas de cycle : $\forall t, t \notin S(t)$*
– *Nœud initial $\exists \tilde{t}, S(\tilde{t}) \cup \{\tilde{t}\} = T$*
– *Chaque nœud non initial a un unique prédécesseur : $\forall t \neq \tilde{t},\ \exists! t',\ t \in s(t')$*

En exercice, on pourra définir les composants T, Z, etc qui représentent les jeux précédents, puis vérifier que ces jeux ont bien les propriétés de structure d'arbre.

2.1. Hypothèse de mémoire parfaite. Il est naturel de supposer qu'un joueur ne peut oublier de l'information au cours du déroulement du jeu. Notamment, ce joueur doit se rappeler tous ses choix précédents. C'est l'hypothèse dite de mémoire parfaite.

DÉFINITION 2. *Le jeu Γ est à mémoire parfaite si pour tout x, y, z tels que $i(x) = i(y) = i(z)$, $h(y) = h(z)$ et a tels que $z \in S(N(x,a)) \cup \{N(x,a)\}$, il existe w tel que :*
– *$h(w) = h(x)$;*
– *$y \in S(N(w,a)) \cup \{N(w,a)\}$.*

A titre d'exemple, considérons le cas du conducteur distrait. Une autoroute comprend deux sorties. Afin de se rendre chez lui, un automobiliste doit prendre la seconde sortie. Cependant, on suppose que le conducteur est distrait, c'est-à-dire qu'au moment de décider de sortir de l'autoroute ou d'y rester, il est incapable de déterminer s'il se trouve à la première ou a la deuxième sortie. Sauriez-vous représenter cette situation par un arbre de jeu ? L'hypothèse de mémoire parfaite est-elle vérifiée ? Pourquoi ?

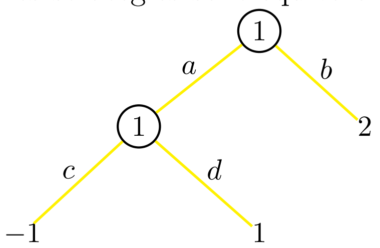
Sauf exception, on ne considérera des jeux avec mémoire parfaite.

2.2. Stratégies pures. Comme dans le cas de la décision dynamique, une stratégie pour un joueur est une fonction de ces ensembles d'information vers ses choix.

DÉFINITION 3. *Une stratégie pure pour $i \in I$ dans Γ est une application s_i: $\{t, i(t) = i\} \to \cup_t A(t)$ telle que :*
– *$\forall t, s_i(t) \in A(t)$;*
– *$s_i(t) = s_i(t')$ si $t \in h(t')$.*

Remarquons que cette définition permet facilement d'énumérer les stratégies du joueur. Cependant, deux stratégies peuvent toujours donner le même résultat. On dira alors qu'elles sont équivalentes (nous reviendrons plus tard sur cette notion).

Comme exercice, et à titre de rappel des problèmes de décision dynamiques, quelles sont les stratégies du joueur 1 dans le jeu suivant ? Quelles stratégies sont équivalentes ?



2.3. Stratégies aléatoires. Comme dans le cas des jeux sous forme normale, nous avons besoin de représenter les possibilités de jouer de manière aléatoire. Deux types de stratégies représentent des choix aléatoires des joueurs.

Définition 4. *Une stratégie mixte est une loi de probabilité sur les stratégies pures.*

Définition 5. *Une stratégie de comportement est une application* $\sigma_i \colon \{t, i(t) = i\} \to \cup_t \Delta(A(t))$ *telle que :*
– $\forall t, \sigma_i(t)(a) > 0 \Rightarrow a \in A(t)$ *;*
– $\sigma_i(t) = \sigma_i(t')$ *si* $t \in h(t')$.

Dans une stratégie mixte, le joueur choisit aléatoirement "au début du jeu" la stratégie pure qu'il utilisera par la suite. Une fois qu'il a choisi cette stratégie, il joue en suivant cette règle déterministe de décisions. Une stratégie de comportements, spécifie un choix aléatoire à chaque nœud de décision, on donc un aléa a chaque fois qu'il s'agit de prendre une décision. L'aléa porte sur la prochaine action choisie, et non pas sur une règle globale de comportement.

2.4. Équivalence des stratégies mixtes et de comportement. Deux stratégies σ_i et σ'_i du joueur i (pures, mixtes ou de comportement) sont équivalentes lorsque pour toutes stratégies σ_{-i} des autres joueurs (idem), (σ_i, σ_{-i}) et (σ'_i, σ_{-i}) induisent la même distribution sur les nœuds terminaux.

Comme nous l'avons vu, des stratégies pures peuvent en particulier être équivalentes entre elles.

2.5. Théorème de Kuhn.

THÉORÈME 6 (de Kuhn). *Dans tout jeu à mémoire parfaite,*

(1) *Toute stratégie mixte admet une stratégie de comportement qui lui est équivalente ;*
(2) *Toute stratégie de comportement admet une stratégie mixte qui lui est équivalente.*

Les deux manières de modéliser la capacité de jouer aléatoirement – en utilisant les stratégies mixtes ou les stratégies de comportement – sont donc équivalentes dans les jeux à mémoire parfaite. On utilisera en pratique la représentation la plus commode selon les cas.

Ce résultat n'est vrai que pour les jeux à mémoire parfaite. Reprenez l'exemple du conducteur distrait. Toutes les stratégies mixtes sont-elles équivalentes à des stratégies de comportement ? Le contraire est-il vrai ?

3. Forme normale et équilibres de Nash

Pour "résoudre" des jeux en forme extensive, nous allons utiliser le concept d'équilibre de Nash de la forme normale, puis montrer que la forme extensive permet de faire des prédictions plus fines (équilibre parfait dans les sous-jeux).

3.1. Forme normale et forme normale réduite. La forme normale associée à Γ est le jeu sous forme normale $G = (I, (S_i)_i, (g_i)_i)$, avec

$$g_i(s) = \mathbf{E}_{P_s} u_i(z)$$

où P_s est la probabilité sur les nœuds terminaux induite par le profil de stratégies (pures) s.

Soit S_i^r l'ensemble des classes d'équivalences de stratégies du joueur i. Un élément de S_i^r est appelé une stratégie réduite du joueur i.
La forme normale réduite de Γ est le jeu sous forme normale $G^r = (I, (S_i^r)_i, (g_i^r))$ avec

$$g_i^r(s^r) = g_i(s)$$

où $s^r = (s_j^r)_j$, $s = (s_j)_j$, $s_j \in s_j^r$ pour tout j. (Le choix de s_j dans s_j^r est indifférent.)

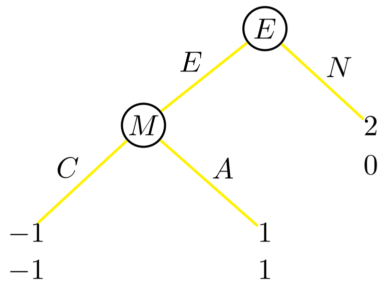
3.2. Équilibre de Nash.

DÉFINITION 7. *Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un équilibre de Nash de la forme normale associée.*

Remarque : Tout les équilibres de Nash d'un jeu sont obtenus dans la forme normale réduite.

Remarque : Lorsqu'on recherche les équilibres de Nash d'un jeu sous forme extensive, on utilise la notion de stratégies mixtes. Cette notion est ici plus utile que celle de stratégies de comportement.

Exemple : Quels sont les équilibres de Nash du jeu d'entrée (en stratégies pures ou mixtes) ?



4. Jeux à information parfaite et complète

DÉFINITION 8. *C'est un jeu sous forme extensive dans lequel chaque ensemble d'information est un singleton.*

Des exemples sont fournis par jeu de Nim, d'échecs, de Go, et par le jeu d'entrée précédent.

Revenons sur ce jeu d'entrée. La menace de jouer c si E joue e est-elle crédible ?

- Supposons que E ait déjà joué e. M a-t-il intérêt à jouer c ou a ? (E est "mis devant le fait accompli").

- Ayant effectué ce raisonnement, E a-t-il intérêt à jouer e ou bien s ?

4.1. Procédure d'induction à rebours. Comme pour la programmation dynamique (jeux à un seul joueur). On définit les stratégies des joueurs en partant des nœuds terminaux, puis pour les décisions plus "en amont" de l'arbre progressivement jusqu'au nœud initial.

On obtient une stratégie unique pour chaque joueur si pas d'égalité entre deux paiements de nœuds terminaux et s'il n'y a pas de nœuds où joue la nature.

THÉORÈME 9 (dit de Zermelo). *Tout jeu à information complète et parfaite admet un équilibre de Nash en stratégies pures, qui peut être calculé par la procédure d'induction à rebours.*

Application au jeu d'échecs : Dans le cas du jeu d'échecs, appliquer le théorème de Zermelo donne le résultat suivant :
– Soit un joueur a une stratégie gagnante ;
– Soit chacun des joueurs peut se garantir la nulle.
Pourquoi joue-t-on encore aux échecs ?

5. Équilibre parfait dans les sous-jeux

La procédure d'induction à rebours dans les jeux à information complète et parfaite permet de résoudre les jeux en ayant des prédictions plus fortes que celles de l'équilibre de Nash. Cette procédure et ces raisonnements peuvent-ils être généralisés aux jeux où les ensembles d'information ne sont pas des singletons ?

Nous commençons par définir la notion de sous-jeu, qui peut-être vu comme une partie d'un jeu pouvant être étudiée séparément du jeu dans son entièreté.

DÉFINITION 10. *Un sous-jeu* Γ' *de* Γ *consiste en*
– *Un sous-ensemble de nœuds non terminaux* $T' \subset T$ *tel que* $T' = S(t')$ *pour un certain* t' *et* $\forall t \in T'$, $h(t) \subset T'$.
– *Les joueurs, mouvements de la nature, actions possibles, successeurs, utilités et ensembles d'information de* Γ' *sont définis comme dans* Γ.

Remarque : En particulier, Γ est un sous-jeu de Γ. Tout jeu admet par conséquent au moins un sous-jeu : lui-même. Les sous-jeux de Γ non égaux à Γ sont appelés sous-jeux stricts de Γ.

Remarque : Dans un jeu à information parfaite et complète, on a autant de sous-jeux que de nœuds non terminaux..

Si on a des stratégies de comportement pour les joueurs dans un jeu, on connaît leurs probabilités de choix à tous les nœuds. Ceci définit en particulier des stratégies dans tous les sous-jeux.

DÉFINITION 11. *Un profil de stratégies s (pures ou de comportement) est un équilibre parfait dans les sous-jeux de* Γ *si s induit un équilibre de Nash dans tout les sous-jeux de* Γ.

La proposition suivante est immédiate, car le jeu tout entier est toujours un sous-jeu de lui-même.

PROPOSITION 12. *Un équilibre parfait dans les sous-jeux est un équilibre de Nash de* Γ.

PROPOSITION 13. *Tout jeu* Γ *admet un équilibre de Nash parfait dans les sous-jeux.*

Méthode : Appliquer la procédure d'induction à rebours à chaque fois que l'on peut.

(1) Identifier un sous-jeu “minimal” Γ' ;
(2) Calculer un équilibre de Nash de Γ' ;
(3) Remplacer Γ' par ce paiement de Nash ;
(4) Recommencer en 1 tant que possible.