CHAPITRE 5

Stratégies Mixtes

Un des problèmes inhérents au concept d'équilibre de Nash en stratégies pures est que pour certains jeux, de tels équilibres n'existent pas. P.ex. le jeu de "Pierre, Papier, Ciseaux" :

	Pi	Pa	Ci
Pi	$0,0$	$-1,1$	$1,-1$
Pa	$1,-1$	$0,0$	$-1,1$
Ci	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$

Pierre, Papier, Ciseaux

n'admet pas d'équilibre de Nash.

La raison pour laquelle on n'a pas d'équilibres est la suivante : la notion d'équilibre de Nash en stratégies pures suppose que chaque joueur connaît les stratégies des autres joueurs. Or, nous sommes dans des jeux ou chaque joueur a intérêt à cacher sa stratégie, ou a bluffer. En effet, dans les jeux "pile ou face" ou "tirer un penalty", ou "bluff au poker", on n'utilise pas toujours la même stratégie, et on ne connaît pas non plus à l'avance celle de l'adversaire.

	Pi	Fa
Pi	$1,-1$	$-1,1$
Fa	$-1,1$	$1,-1$

Pile ou face

Les stratégies mixtes, ou aléatoires, vont permettre de représenter ces possibilités de bluff, ou de jouer aléatoirement.

1. Définition des concepts

Nous allons définir les stratégies mixtes, puis les jeux dans lesquels les joueurs ont la possibilité de jouer des stratégies mixtes, et enfin définir un équilibre de Nash en stratégies mixtes comme un équilibre de Nash d'un tel jeu.

1.1. Stratégies mixtes. Nous commençons par définir le concept de stratégies mixtes. Soit donc $G = (I, (S_i)_i, (g_i)_i)$ un jeu sous forme normale

DÉFINITION 1. *Une stratégie mixte pour le joueur i est une loi de probabilités sur S_i. $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ représente l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i.*

On utilisera les notations : $\Sigma = \Pi_i \Sigma_i$, $\Sigma_{-i} = \Pi_{j \neq i} \Sigma_j$.

Par opposition aux stratégies mixtes, on appelle les éléments de S_i **stratégies pures**. Ce sont des stratégies déterministes.

On utilisera selon les cas différentes notations pour une stratégie mixte.

(1) Notation fonction. σ_i est l'application de S_i vert $\mathbb{R}$ qui associe à la stratégie pure s_i sa probabilité d'être jouée. Exemple : $S_1 = \{H, B\}$, $\sigma_1(H) = \sigma_1(B) = \frac{1}{2}$

(2) Vecteur. On écrit σ_i comme un vecteur de probabilités. Si $S_i = \{s_{i,1}, \ldots, s_{i,n_i}\}$, on σ_i se représente comme $(\sigma_i(s_{i,1}), \ldots, \sigma_i(s_{i,n_i}))$. Exemple : $\sigma_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(3) Combinaison convexe de stratégies pures : $\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}B$.

Il y a plusieurs interprétations possibles des stratégies mixtes, parmi elles, les plus courantes sont les suivantes :

– Possibilité "matérielle" de jouer aléatoirement. Rien ne s'oppose à priori à ce qu'un joueur décide aléatoirement quelle stratégie pure utiliser. La stratégie mixte est un choix aléatoire d'une stratégie pure.
– Bluff, et part d'incertitude que chacun laisse sur sa stratégie. Ici, une stratégie mixte représente plutôt une croyance que chaque joueur a sur les manières de jouer des autres joueurs. Même si je décide si je vais bluffer ou non, de manière pas forcément aléatoire, je ne souhaite surtout pas que les autres joueurs connaissent mon choix !
– Dans une grandes populations de joueurs, une stratégie correspond à une proportion dans laquelle une stratégie pure est jouée dans la population. Par exemple, si dans la ville de New Delhi 30% des piétons cherchent à se ranger à gauche (systématiquement) lorsqu'ils croisent un autre piéton, et 70% à droite, à chaque fois que je croise un piéton dans cette ville je joue face à la stratégie mixte $(30\%, 70\%)$.
– Incertitude sur les paiements. (Harsanyi). Supposons que selon mon 'humeur" du moment, j'aie une faible préférence pour bluffer, ou pour ne pas bluffer, et que les autres joueurs ne connaissent pas mes préférences. Dans ce cas, je joue la stratégie que je préfère, donc pas aléatoirement, mais les autres joueurs ont l'impression que je joue aléatoirement, et se représentent mon comportement par une stratégie mixte.

Proposition 2. *L'ensemble Σ_i des stratégies mixtes du joueur i est convexe. Ses points extrêmaux sont les stratégies qui mettent probabilité 1 sur un seul point de S_i.*

Remarquons qu'un stratégie pure s_i correspond à la stratégie mixte qui joue s_i avec probabilité 1. On considère donc S_i comme sous-ensemble de Σ_i. Par conséquent, toute stratégie pure est vue comme une stratégie mixte. En considérant l'ensemble des stratégies mixtes, on étend les ensembles des stratégies des joueurs.

1.2. Extension mixte d'un jeu. Si chaque joueur j joue la stratégie σ_j, la probabilité que $(s_j)_j$ soit le profil d'actions effectivement joué est $\Pi_i \sigma_i(s_i)$. Par conséquence, le paiement espéré du joueur i est :

$$\sum\nolimits_{(s_j)\in\prod_j S_j} \Pi_j \sigma_j(s_j) g_i((s_j)_j)$$

Remarque : On fait l'hypothèse de fonctions d'utilités de von Neumann et Morgenstern, l'utilité pour l'aléa est l'espérance de l'utilité obtenue.

La relation précédente définit des fonctions de paiements $g_i \colon \Sigma \to \mathbb{R}$. On utilise donc la même notation pour l'application de S vers $\mathbb{R}$ et pour son extension de Σ vers $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 3. L'extension mixte *du jeu sous forme normale* $(I, (S_i), (g_i)_i)$ *est le jeu sous forme normale* $(I, (\Sigma_i)_i, (g_i)_i)$.

Dans l'extension mixte :
– L'ensemble des joueurs est I.
– Chaque joueur choisit une stratégie mixte $\sigma_i \in \Sigma_i$.
– Le paiement de i est $g_i(\sigma)$.

PROPOSITION 4. *L'application* $g \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *est multilinéaire, c.a.d. elle est linéaire sur chaque coordonnée* Σ_i.

Preuve : il faut montrer que pour $\sigma_{-j} \in \Sigma_{-j}$, $\sigma_j, \sigma'_j \in \Sigma_j$ et $\lambda \in [0,1]$, et $\sigma''_j = \lambda\sigma_j + (1-\lambda)\sigma'_j$:

$$g(\sigma_{-j}, \sigma''_j) = \lambda g(\sigma_{-j}, \sigma_j) + (1-\lambda) g(\sigma_{-j}, \sigma'_j)$$

En particulier on a :

$$g(\sigma_{-j}, \sigma_j) = \sum\nolimits_{s_j \in S_j} \sigma_j(s_j) g(\sigma_{-j}, s_j)$$

1.3. Équilibre de Nash en stratégies mixtes.

DÉFINITION 5. *Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de* G *est un équilibre de Nash du jeu avec ensembles de stratégies* Σ_i *et fonction de paiements* g_i.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est donc un profil de stratégies mixtes $\sigma \in \Sigma$ tel que $\forall i$, $\forall \sigma'_i \in \Sigma_i$,

$$g_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \geq g_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$$

2. Etude de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes

Nous allons nous poser (et y répondre) les questions suivantes sur les EN en stratégies mixtes.

(1) Quel rapport avec les EN en stratégies pures ?
(2) Comment calculer les EN en stratégies mixtes ?
(3) Quel est le rapport avec l'élimination itérée de stratégies dominées ?
(4) Existence des EN en stratégies mixtes ?

2.1. Équilibres de Nash en stratégies pures et mixtes.

Proposition 6. *σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si :*

$$\forall i, \quad \forall s_i \in S_i \qquad g_i(\sigma_{-i}, \sigma_i) \geq g_i(\sigma_{-i}, s_i)$$

La partie "seulement si" provient du fait qu'une stratégie pure est aussi une stratégie mixte, la partie "si" de la linéarité de g_i en σ_i.

Exemple 1. *Chercher un équilibre de Nash du jeu de Pile ou Face, puis du jeu de "Pierre, Papier, Ciseaux".*

Proposition 7. *Tout EN en stratégies pures est aussi un EN en stratégies mixtes.*

Preuve : Corollaire de la proposition précédente.
Par conséquent, considérer les stratégies mixtes nous donne plus d'équilibres qu'avec les stratégies pures. Pour les équilibres ne faisant intervenir que des stratégies pures, on parle d'équilibres de Nash en stratégies pures.

2.2. Recherche des équilibres en stratégies mixtes.

Définition 8. *Dans un jeu fini, le support de $\sigma_i \in \Sigma_i$ est*

$$supp(\sigma_i) = \{s_i \in S_i, \sigma_i(s_i) > 0\}$$

Proposition 9. *(indifférence sur le support) Si σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes,*

$$\forall i, \quad \forall s_i, s'_i \in supp(\sigma_i) \qquad g_i(\sigma_{-i}, s_i) = g_i(\sigma_{-i}, s'_i)$$

En effet, si une stratégie du support donnait un meilleur paiement que σ_i, elle constituerait une déviation profitable. Elles donnent donc toutes un paiement inférieur ou égal à celui de σ_i. Mais alors, si une d'entre elles donnait un paiement strictement inférieur à celui de σ_i, on obtient une contradiction (utiliser le fait que cette stratégie est jouée avec probabilité ¿ 0 sous σ_i et la linéarité de g_i en σ_i).

PROPOSITION 10. *σ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si et seulement si pour tout i,*

– $\forall s_i \in supp(\sigma_i)$

$$g_i(\sigma_{-i}, s_i) = g_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$$

– $\forall s_i \notin supp(\sigma_i)$

$$g_i(\sigma_{-i}, s_i) \leq g_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$$

Conséquence des résultats précédents.

Ceci suggère une procédure de recherche des équilibres :

(1) essayer tous les supports possibles ;
(2) résoudre les probabilités rendant chaque joueur indifférent sur son support ;
(3) vérifier que les stratégies hors du support ne donnent pas un paiement supérieur.

Exemple : Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures et mixtes du jeu suivant ?

	G	D
H	$1,1$	$0,4$
B	$0,2$	$2,1$

Même question avec le jeu de "Pierre, Papier, Ciseaux".

2.3. Stratégies mixtes et dominées. Nous commençons par étendre la relation de domination stricte aux stratégies mixtes.

DÉFINITION 11. *On dit que σ_i domine σ'_i (strictement) lorsque pour toute σ_{-i},*

$$g_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > g_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

Pour vérifier qu'une stratégie en domine une autre, il suffit de le vérifier face à tout profil de stratégies pures.

PROPOSITION 12. *σ_i domine σ'_i si et seulement si pour tout s_{-i},*

$$g_i(\sigma_i, s_{-i}) > g_i(\sigma'_i, s_{-i})$$

La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, utiliser la linéarité.

Une stratégie non dominé par une stratégie pure peut être dominée par une stratégie mixte.

EXEMPLE 2. *Dans le jeu suivant :*

	G	M	D
h	$1,1$	$0,2$	$0,4$
m	$0,2$	$5,0$	$1,6$
b	$0,2$	$1,1$	$2,1$

M est strictement dominé par $\frac{1}{2}G + \frac{1}{2}D$.

On arrive à redéfinir la procédure d'élimination itérée de stratégies dominées en prenant en compte les stratégies dominées par des stratégies mixtes.

- **Étape 1 :** $S_i^0 = S_i$.
- **Étape 2 :**

$$S_i^1 = \{\text{elts. de } S_i \text{ non dominés par des elts. de } \Sigma_i\}$$

$$\Sigma_i^1 = \{\text{stratégies mixtes à support dans } S_i^1\}$$

- **Étape $k+1$:**

$$S_i^{k+1} = \{s_i \in S_i^k,\ \nexists \sigma_i \in \Sigma_i^k, \forall s_{-i} \in S_{-i}^k, g_i(\sigma_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i})\}$$

Stratégies non dominées *face aux stratégies de* S_i^k

$$\Sigma_i^k = \{\text{stratégies mixtes à support dans } S_i^k\}$$

- **Étape ∞ :** $S_i^\infty = \cap_k S_i^k$.

Les équilibres de Nash en stratégies mixtes résistent à la procédure d'élimination itérée de stratégies (strictement) dominées.

PROPOSITION 13. *Si σ est un EN en stratégies mixtes :*

$$\forall i \quad supp(\sigma_i) \in S_i^\infty$$

Pour la démonstration, suivre le même raisonnement que pour l'élimination des stratégies dominées par des stratégies pures.

Exemple : résoudre le jeu précédent.

2.4. Existence des équilibres de Nash en stratégies mixtes. On a un équilibre de Nash lorsque chaque joueur joue optimalement face aux stratégies des autres joueurs. Pour caractériser ces équilibres, nous sommes intéressés par l'application qui associe à chaque σ_{-i} l'ensemble des stratégies σ_i qui donnent le meilleur paiement face à σ_{-i}. Ceci s'appelle la correspondance de meilleures réponses.

DÉFINITION 14. *Une correspondance de A vers B est une application de A vers les parties de B.*

DÉFINITION 15. *La correspondance de meilleure réponse de i de Σ_{-i} vers Σ_i est :*

$$MR_i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} g_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$$

La correspondance de meilleures réponses de Σ vers Σ est donnée par

$$MR(\sigma) = \Pi_i MR_i(\sigma_{-i})$$

Les meilleures réponses permettent de caractériser les équilibres de Nash :

PROPOSITION 16. *σ est un EN si et seulement si :*

$$\forall i \quad \sigma_i \in MR_i(\sigma_{-i})$$

i.e.

$$\sigma \in MR(\sigma)$$

On a les propriétés suivantes de la correspondance de meilleures réponses :

PROPOSITION 17.
- *Pour tout σ, $MR(\sigma)$ est non vide*
- *Pour tout σ, $MR(\sigma)$ est convexe*
- *Si tous les S_i sont finis, le graphe de MR est fermé, i.e. si $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$ et $\tau_n \in MR(\sigma_n)$ alors $\tau \in MR(\sigma)$.*

On rappelle le théorème d'existence de point fixe d'une correspondance de Kakutani :

THÉORÈME 18 (de Kakutani). *Soit X un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et F une correspondance de X vers X telle que :*
- *$\forall x \in X$, $F(x)$ est convexe et non vide ;*
- *Le graphe de F est fermé.*

Alors F admet un point fixe, i.e. il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.

Exercice Montrer que les hypothèses
- X compact ;
- X convexe ;
- $F(x)$ non vide pour tout x ;
- $F(x)$ convexe pour tout x ;
- le graphe de F est fermé

sont nécessaires.

En corollaire du théorème précédent, on a le théorème d'existence d'équilibres de Nash en stratégies mixtes :

THÉORÈME 19 (Glicksberg, Nash). *Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

3. Le jeu de pénalties

Un joueur, décide de tirer soit à droite, soit à gauche du gardien. Le gardien peut plonger soit à droite, soit à gauche. Le tir peut être bien tiré ou sortir complètement (avec probabilité p_D pour un tir à droite, p_G à gauche). Le gardien arrête toujours la balle s'il plonge du bon côté. Il y a donc but si :

(1) La balle est bien tirée ;

(2) Le gardien plonge du mauvais côté.

On demande de résoudre les questions suivantes : L'objectif du joueur est de maximiser les possibilités que de marquer but, et le gardien veut minimiser ces possibilités.

– Représenter le jeu sous forme normale.
– Quels sont les équilibres de Nash ?
– Un droitier tire-t-il plus souvent à gauche ou à droite ?
– Face à un droitier, le gardien plonge-t-il plus souvent à gauche ou à droite ?

Indice : Pour un droitier, $p_G > p_D$.

4. Course au brevet

Deux entreprises se lancent dans une course au brevet. Chacune investit un montant positif dans la recherche et celui qui investit le plus reçoit une subvention $V > 0$. En cas d'égalité, chacun reçoit $V/2$. On prend l'intervalle $[0, V]$ comme ensemble de stratégies pour chaque joueur.

(1) Montrer que ce jeu n'a pas d'équilibre (en stratégies pures).
(2) Montrer qu'il existe un équilibre en stratégies mixtes dans lequel joue une loi à support "plein" $[0, V]$.