CHAPITRE 4

Jeux sous forme normale

Dans les problèmes de décision, nous avons relié les choix qui pouvaient être faits par un agent avec les utilités qu'il pouvait en dériver. L'idée qu'un agent rationnel maximise son utilité (espérée) nous permet ensuite de dériver la notion de "bon" choix, ou choix maximisateur.

Nous allons maintenant nous intéresser à la théorie des jeux, que l'on pourrait aussi appeler théorie de la décision interactive, en modélisant des situations dans lesquels plusieurs agents sont en situations de choix, les choix des uns affectant l'utilité des autres.

1. Description d'un jeu sous forme normale

Exemple 1. *Amanda et Bertrand veulent se rencontrer à NY, mais n'ont pas décidé d'un lieu de rendez-vous. Ils peuvent chacun se rendre soit à l'Empire State Building, soit à Central Park.*

Le but de chacun est de rencontrer l'autre, peut importe où. Les préférences de chacun sur quel lieu où aller dépendent donc de ce que fait l'autre.

On peut donc décrire la situation par les éléments suivants :
- *2 joueurs, Amanda et Bertrand*
- *2 décisions possibles pour chacun d'entre eux. (ESB, CP).*
- *L'utilité de chaque joueur dépend de son choix et de celui de l'autre joueur.*

En général, un jeu sous forme normale est donné par
- Une liste d'agents (ou joueurs) I ;
- Un ensemble de stratégies S_i pour chaque agent i ;
- L'issue du jeu s correspond au vecteur (s_i) de stratégies choisi ;
- Des préférences pour les joueurs sur S, représentées par une fonction $g_i \colon \Pi_i S_i \to \mathbb{R}$.

Exemple 2. *Pour le jeu de rendez-vous à New-York,*
- $I = \{Amanda,\ Bernard\}$;
- $S_i = \{E, C\}$;
- $S = \{(E, C), (E, E), (C, C), (C, E)\}$;
- $g_i(s_1, s_2) = 1$ *si* $s_1 = s_2$, 0 *sinon.*

On représente le jeu par la matrice suivante : Amanda choisit la ligne, et Bernard choisit la colonne. La paire de paiements pour Amanda et pour Bernard est inscrite dans la case.

	E	C
E	$1,1$	$0,0$
C	$0,0$	$1,1$

DÉFINITION 1. *Un jeu G sous forme normale est donné par :*
– *Un ensemble fini de joueurs I ;*
– *Des ensembles de stratégies S_i ;*
– *Des fonction de paiements $g_i\colon \Pi_i S_i \to \mathbb{R}$.*
On utilise les notations : $S = \Pi_i S_i$ $S_{-i} = \Pi_{j \neq i} S_j$.

Nous passons maintenant en revue quelques jeux ou classes de jeux particulièrement importants.

1.1. Jeux à intérêts communs. Ce sont des jeux dans lesquels tous les joueurs ont les mêmes intérêts, ou préférences. On a donc $g_i = g_j$ pour tous joueurs i, j. On peut voir ces jeux comme une généralisation des problèmes à un agent.

Par exemple, le jeu de rendez-vous à New-York fait partie de cette catégorie.

1.2. Jeux à somme nulle. Ce sont des jeux à deux joueurs dans lesquels les intérêts sont parfaitement antagonistes. Ce qui est gagné par un joueur est perdu par l'autre. La somme des fonctions d'utilité est donc 0. C'est à dire que $g_i = -g_j$.

EXEMPLE 3. *Jeux de pile ou face. Deux joueurs annoncent Pile (P) ou face (F). Le joueurs 2 paie 1 € à 1 si les deux choisissent la même chose, sinon le joueur 1 paie 1 € au joueur 2.*

	P	F
P	$1,-1$	$-1,1$
F	$-1,1$	$1,-1$

Chaque case représente l'utilité du joueur 1, suivie par celle du joueur 2.

1.3. La bataille des sexes. Certains jeux font intervenir une part de coordination et une part de conflit entre les agents. C'est le cas du jeu de la bataille des sexes suivant.

EXEMPLE 4. *Un couple veut décider d'une sortie. L'homme préfère aller voir un match de foot, et la femme préfère aller à l'Opéra. Pour chacun, être avec l'autre est plus important que le lieu.*

	F	O
F	$2,1$	$0,0$
O	$0,0$	$1,2$

1.4. La fureur de vivre. Deux adolescents en vélo foncent l'un vers l'autre dans un chemin étroit. Personne ne veut sortir du chemin. Si les deux sortent, aucun n'est vraiment satisfait, ni mécontent. Les choix sont F (faucon), ou C (colombe).

	F	C
F	$-1, -1$	$10, 0$
C	$0, 10$	$5, 5$

1.5. Dilemme du prisonnier. Deux prisonniers complices sont interrogés séparément. Chacun peut trahir son partenaire (T), ou bien rester silencieux (S). Si les deux trahissent, ils vont en prison pour 5 ans chacun. Si l'un trahit et pas l'autre celui qui trahit sort libre et l'autre va en prison pour 10 ans. Si personne ne trahit, ils vont en prison pour 3 ans tous deux.

	S	T
S	$-3, -3$	$-10, 0$
T	$0, -10$	$-5, -5$

Le jeu du dilemme du prisonnier est un exemple fondamental en économie. Ce jeu est important car il fait ressortir une tension entre l'intérêt individuel et l'intérêt collectif. De nombreuses situations présentent une structure similaire à celle du dilemme du prisonnier

– Achat par internet ; Un acheteur et un vendeur se sont mis d'accord sur internet. Chacun a le choix entre envoyer le colis (ou bien l'argent), et ne pas l'envoyer. Chacun préfère que l'autre l'envoie et préférerait ne pas envoyer sa part. Cependant, les deux sont plus satisfaits si chacun respecte sa part du contrat plutôt que si aucun ne le fait.
– Course aux armements ; Chaque pays peut décider de s'armer, ou non. L'intérêt des deux pays est qu'aucun ne dépense de ressources pour s'armer, mais à stratégie fixée de l'autre, chacun préfère s'armer.
– Achat d'un 4x4 ; Un 4x4 est avantageux pour celui qui l'a car on peut impressionner les autres voitures, et on se sent plus en sécurité. Mais ceci est au détriment des autres voitures.
– Collusion et la commission européenne ; La commission européenne cherche à lutter contre les ententes secrètes des industries. Le problème étant que personne ne veut dénoncer ces ententes. La règle est que celui qui dénonce une entente ne se verra pas poursuivi. Chacun a donc intérêt à dénoncer plutôt qu'à être dénoncé.

1.6. Compétition en quantités dite de Cournot. Deux firmes, 1 et 2, produisent des biens identiques. Chacune décide d'un niveau de production q_i, à un coût $c_i(q_i)$. Le prix résultant de la loi de l'offre et de la demande est $p(q_1+q_2)$.

$$\begin{array}{rcl} I & = & \{1,2\} \\ S_i & = & \mathbb{R}_+ \\ g_1(q_1,q_2) & = & q_1 p(q_1+q_2) - c_1(q_1) \\ g_2(q_1,q_2) & = & q_2 p(q_1+q_2) - c_2(q_2) \end{array}$$

1.7. Compétition en prix dite de Bertrand. Il s'agit d'un modèle de compétition par les prix. Chaque firme décide d'un prix de vente du bien, et les consommateurs (une unité en tout) achètent à la firme au prix le plus bas.

$$\begin{array}{rcl} I & = & \{1,2\} \\ S_i & = & [0,M] \end{array}$$

$$g_i(p_i,p_j) = \begin{cases} p_i & \text{si} \quad p_i < p_j \\ 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \\ p_i/2 & \text{si} \quad p_i = p_j \end{cases}$$

2. Stratégies dominantes et dominées

Nous commençons maintenant l'étude des prédictions des issues des jeux sous forme normale. Étant donné un jeu, et en supposant les joueurs rationnels, que peut-on prédire qu'ils vont jouer, ou que peut-on prédire qu'ils ne vont pas jouer ? Si nous devions jouer dans un tel jeu, quel choix ferions-nous ?

Une stratégie dominée est une stratégie qui donne un paiement strictement moins bon que celui d'une autre stratégie donnée, ceci pour tout choix possible des adversaires.

Définition 2. *Une stratégie s_i est dominée (strictement) s'il existe s'_i telle que*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ g_i(s'_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i})$$

On dit alors que s'_i domine (strictement) s_i.

Un joueur "rationnel" ne devrait jamais jouer une stratégie dominée. En effet, il a le choix d'une autre stratégie dont il sait qu'elle peut lui donner un meilleur gain, indépendamment des choix des autres joueurs.

Une stratégie dominante donne un meilleur paiement que toute autre stratégie, pour tous les choix des autres joueurs.

Définition 3. *Une stratégie s_i est strictement dominante si pour toute autre stratégie s'_i.*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i},\ g_i(s_i, s_{-i}) > g_i(s'_i, s_{-i})$$

La définition se réécrit :

PROPOSITION 4. *Une stratégie s_i est dominante si et seulement si elle domine toute stratégie $s'_i \neq s_i$.*

Une conséquence quasi-immédiate de la définition est :

PROPOSITION 5. *Si une stratégie s_i est dominante, alors elle est unique à avoir cette propriété.*

Si un joueur a une stratégie dominante, on peut alors penser que cette stratégie constitue un bon choix. Pour chaque choix des autres, elle donne le meilleur paiement possible.

Nous pouvons maintenant construire un raisonnement en se basant sur le fait que si aucun joueur ne choisit de stratégie dominée, alors les autres joueurs peuvent anticiper ce phénomène.

EXEMPLE 5. *Considérons le jeu suivant :*

	S	T
S	$0, -2$	$-10, -1$
T	$-1, -10$	$-5, -5$

Que devrait jouer le joueur 1 s'il sait que le joueur 2 est rationnel ?

EXEMPLE 6. *Considérons le jeu suivant :*

	G	M	D
H	$2, 2$	$1, 1$	$4, 0$
B	$1, 2$	$4, 1$	$3, 5$

- *Que devrait jouer le joueur 1 s'il sait que le joueur 2 est rationnel ?*
- *Que devrait jouer le joueur 2 s'il sait que le joueur 1 sait qu'il est rationnel ?*

Ceci nous amène à définir le processus d'élimination itérée des stratégies dominées.

DÉFINITION 6. *La procédure d'élimination itérée des stratégies dominées est la suivante :*

- **Étape 1 :** $S_i^0 = S_i$.
- **Étape 2 :** $S_i^1 = \{$ *stratégies non dominées de* i $\}$.
- **Étape $k+1$:**

  $$S_i^{k+1} = \{s_i \in S_i^k, \nexists s'_i \in S_i^k, \forall s_{-i} \in S_{-i}^k, g_i(s'_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i})\}$$

  Stratégies non dominées face aux stratégies de S_i^k
- **Étape ∞ :** $S_i^\infty = \cap_k S_i^k$.

Pour certains jeux, cette définition nous conduit à une prédiction unique des stratégies suivies par les joueurs.

DÉFINITION 7. *Un jeu G est résoluble par élimination itérée de stratégies dominées si pour tout i, S_i^∞ est un singleton.*

EXEMPLE 7. *Que dit la procédure d'élimination de stratégies dominées dans le jeu suivant ?*

	A	B	C	D
A	$5,2$	$2,6$	$1,4$	$0,4$
B	$0,0$	$3,2$	$2,1$	$1,1$
C	$7,0$	$2,2$	$1,5$	$5,1$
D	$9,5$	$1,3$	$0,2$	$4,8$

Passons maintenant à l'exemple suivant.

EXEMPLE 8.

	G	D
H	$2,2$	$4,4$
B	$3,1$	$4,1$

Quelles sont les stratégies dominées, dominantes ? Quelles stratégies paraissent "raisonnables" ?

Dans l'exemple précédent, il n'y a pas de stratégies dominantes, ni dominées. Cependant, le choix de la stratégie B pour le joueur 1, et D pour le joueur 2, semble un bon choix, car ces stratégies ne peuvent donner qu'un meilleur paiement que l'autre, et jamais un paiement moins bon. Ceci nous conduit à la définition d'une stratégie faiblement dominée.

DÉFINITION 8. *Une stratégie s_i est faiblement dominée s'il existe s_i' telle que :*

$$\begin{aligned} \forall s_{-i}, g_i(s_i', s_{-i}) &\geq g_i(s_i, s_{-i}) \\ \exists s_{-i}, g_i(s_i', s_{-i}) &> g_i(s_i, s_{-i}) \end{aligned}$$

On dit dans ce cas que s_i' domine faiblement s_i.

Dans le jeu précédent, H est faiblement dominée pour le joueur 1, et G est faiblement dominée pour le joueur 2.

DÉFINITION 9. *Une stratégie s_i est faiblement dominante si pour toute autre stratégie s_i'.*

$$\begin{aligned} \forall s_{-i} \in S_{-i},\ g_i(s_i, s_{-i}) &\geq g_i(s_i', s_{-i}) \\ \exists s_{-i} \in S_{-i},\ g_i(s_i, s_{-i}) &> g_i(s_i', s_{-i}) \end{aligned}$$

Si une telle stratégie existe, elle est unique. Elle semble représenter un choix "raisonnable", car on ne peut jamais le regretter.

La définition se réécrit :

PROPOSITION 10. *Une stratégie s_i est faiblement dominante si et seulement si elle domine faiblement toute stratégie $s_i' \neq s_i$.*

Une conséquence quasi-immédiate de la définition est :

PROPOSITION 11. *Si une stratégie s_i est faiblement dominante, alors elle est unique à avoir cette propriété.*

EXEMPLE 9. *Un groupe de joueurs I participe à une enchère pour un objet. La valeur de cet objet est v_i pour le joueur i. Si chaque joueur i met une enchère de e_i, l'objet est attribué à celui qui met l'enchère la plus haute, à un prix correspondant à la seconde enchère la plus haute.*

On demande de montrer comme exercice que pour le joueur i, jouer $e_i = v_i$ est une stratégie faiblement dominante.

Lorsqu'un joueur possède une stratégie dominante, on peut penser que cette stratégie constitue un "bon" choix. En revanche, une stratégie dominée (même faiblement) ne semble pas constituer un bon choix. Nous sommes tentés de généraliser la procédure de suppression itérée de stratégies dominées aux stratégies faiblement dominées. Voyons ce que l'on obtient dans l'exemple suivant :

EXEMPLE 10. *Soit le jeux donné par la matrice de paiements*

	G	D
H	$1,1$	$0,0$
M	$1,1$	$2,1$
B	$0,0$	$2,1$

La procédure d'élimination des stratégies faiblement dominées nous permet d'éliminer T, puis L. Cette procédure pourrait aussi bien nous conduire à éliminer B, puis R. Ces deux ordres de suppression de stratégies dominées nous conduit à des résultats différents. La méthode n'est donc pas concluante.

On demande de montrer en exercice que l'ordre de suppression des stratégies strictement dominées n'a pas d'influence sur le résultat final.

En conclusion : Si on supprime de manière itérée les stratégies **faiblement** dominées, le résultat peut dépendre de l'ordre des itérations. Ce n'est donc pas une bonne procédure. En revanche, nous n'avons pas ces difficultés avec la suppression itérée de stratégies strictement dominées.

EXEMPLE 11. *Considérons le jeu de compétition de Cournot suivant :*
- $c_i(q_i) = cq_i$.
- $p = \alpha - \beta(q_1 + q_2)$.

Si i croit que j va choisir q_j, alors la meilleure réponse (la stratégie qui maximise le paiement de i à stratégie de j fixée) est :

$$MR_i(q_j) = \begin{cases} \frac{\alpha-c}{2\beta} - \frac{q_j}{2} & si \quad q_i \leq \frac{\alpha-c}{\beta} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Les joueurs choisissent dans $S^0 = \mathbb{R}$. Toutes les stratégies hors de $S^1 = [0, \frac{\alpha-c}{2\beta}]$ sont dominées (par 0). Ensuite, toutes les stratégies hors *de $S^2 = [MR(\frac{\alpha-c}{2\beta}), MR(0)]$ sont dominées (par $MR(\frac{\alpha-c}{2\beta})$). En itérant, on démontre que le jeu est résoluble par élimination itérée de stratégies dominées et que, $S_i^\infty = \{\frac{\alpha-c}{3\beta}\}$.*

3. Équilibre de Nash

La suppression itérée de stratégies dominées est attractive car elle repose sur l'idée de rationalité (et sur la connaissance par les joueurs de la rationalité des autres, etc...). Cependant, peu de jeux sont résolubles par élimination itérée de stratégies dominées. Nous introduisons qui s'applique à une plus grande gamme de jeux : l'équilibre de Nash.

L'équilibre de Nash peut être compris comme une convention sociale stable. C'est une règle collective de laquelle aucun individu n'a intérêt à s'écarter pourvu que les autres individus respectent eux aussi la règle.

DÉFINITION 12. *Un profil de stratégies $s^* = (s_i)_i$ est un équilibre de Nash (en stratégies pures) si :*

$$\forall i, \forall s'_i \in S_i, g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(s'_i, s_{-i})$$

La notion suivante d'équilibre de Nash strict est plus forte. Elle suppose que les joueurs préfèrent tous strictement jouer l'équilibre de Nash plutôt qu'une autre stratégie si les autres joueurs suivent l'équilibre de Nash.

DÉFINITION 13. *Un profil de stratégies $s^* \in S$ est un équilibre de Nash* strict *(en stratégies pures) si*

$$\forall i, \forall s'_i \in S_i, g_i(s^*_i, s^*_{-i}) > g_i(s'_i, s^*_{-i})$$

En particulier, un équilibre de Nash strict est un équilibre de Nash.

EXEMPLE 12. *Dilemme du prisonnier*

	S	T
S	$-3, -3$	$-10, -10$
T	$0, -10$	$-5, -5$

Seul équilibre de Nash : (T, T).

EXEMPLE 13. *Soit le jeu*

	G	M	D
H	$2, 2$	$1, 1$	$4, 0$
B	$1, 2$	$4, 1$	$3, 5$

Unique équilibre de Nash : (H, G).

Le jeu du dilemme du prisonnier est résoluble en stratégies dominées, et l'équilibre de Nash est compatible avec cette prédiction.

Le jeu précédent n'est pas résoluble en stratégies dominées, et cependant l'équilibre de Nash nous donne une prédiction.

A l'équilibre de Nash, aucune stratégie dominée n'est jouée. Plus généralement, toutes les stratégies des équilibres de Nash survivent à l'élimination itérée des stratégies dominées.

PROPOSITION 14. *Si s^* est un équilibre de Nash, alors pour tout i, $s_i^* \in S_i^\infty$.*

Démonstration : Supposons $s \in \Pi_i S_i^k$, $s_i \notin S_i^{k+1}$. Alors il existe s_i' meilleur pour i que s_i contre tous $s_{-i} \in \Pi_{j \neq i} S_j^k$, donc en particulier contre s_{-i}^*. Contradiction.

Si on a un profil de stratégies dominantes, ce profil constitue un équilibre de Nash :

PROPOSITION 15. **Proposition :** *Si s^* est un profil de stratégies faiblement dominantes, s^* est un équilibre de Nash. Si s^* est un profil de strictement dominantes alors s^* est l'unique équilibre de Nash.*

EXEMPLE 14. *Le jeu suivant est-il résoluble par élimination itérée de stratégies dominées ? Quels sont ses équilibres de Nash ?*

	G	M	D
h	$5,3$	$0,4$	$3,5$
m	$4,0$	$5,5$	$4,0$
b	$3,5$	$0,4$	$5,3$

EXEMPLE 15. *Reprenons le jeu de compétition de Cournot donné par :*
– $c_i(q_i) = cq_i$.
– $p = \alpha - \beta(q_1 + q_2)$.
Quels sont les équilibres de Nash ?

EXEMPLE 16. *Deux firmes, 1, 2. Firme i décide d'un prix p_i. Le coût marginal de production est c. La demande est donnée par $D(p)$, tous les acheteurs achètent au meilleur prix.*

$$D_i(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_i) & si \quad p_i < p_j \\ D(p_i)/2 & si \quad p_i = p_j \\ 0 & si \quad p_i > p_j \end{cases}$$

On suppose D décroissante, et $D(c) > 0$.

Quels sont les équilibres de Nash ?

EXEMPLE 17. *Modèle de compétition spatiale, appelée aussi compétition de Hotelling. Deux vendeurs de glace sur une plage linéaire ([0,1]). Chacun choisit un emplacement $x_i \in [0, 1]$. Les consommateurs sont uniforméments répartis sur la plage, et achètent au vendeur le plus proche. Chaque vendeur veut maximiser ses ventes. Représentation en jeux ? Équilibres de Nash ?*

Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash.

Exemple 18. *Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu du RdV à NY ?*

	E	C
E	$1, 1$	$0, 0$
C	$0, 0$	$1, 1$

On peut aussi ne pas avoir d'équilibres. Voir le jeu suivant.

Exemple 19. *Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu suivant à somme nulle ?*

	P	F
P	$-1, 1$	$1, -1$
F	$1, -1$	$-1, 1$

On peut avoir plusieurs équilibres de Nash, et cependant en préférer un plutôt qu'un autre pour des raisons liées au "risque" pris en jouant les stratégies.

Exemple 20. *Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu suivant ? Quelle stratégie choisiriez-vous ?*

	A	B
A	$9, 9$	$-15, 8$
B	$8, -15$	$7, 7$

Certaines stratégies faiblement dominées peuvent être jouées à l'équilibre de Nash.

Exemple 21. *Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures du jeu suivant ? Quelle stratégie choisiriez-vous ?*

	A	B
A	$2, 2$	$1, 2$
B	$2, 1$	$1, 1$

3.1. Interprétations de l'Équilibre de Nash. La notion d'équilibre de Nash est centrale en théorie des jeux et en microéconomie. Elle est aussi appliquée en informatique, biologie, en sociologie... Les interprétations de cette notion sont diverses. On peut citer les justifications suivantes :

– Prescriptions. Un individu extérieur propose un profil de stratégies. Si ce profil est un équilibre de Nash, personne n'a intérêt à dévier.
– Communication. Les joueurs se mettent d'accord à l'avance sur quel profil jouer. Les EN sont des accords viables.

– Introspection. Un joueur analyse le jeu et se convainc que seul l'EN est possible. Valable uniquement si unique EN.
– Norme sociale. Dans certains pays, nous conduisons à droite de la route, dans d'autres à gauche. C'est la norme sociale qui dicte une règle. EN est nécessaire pour que cette règle soit suivie.
– Apprentissage. Les joueurs découvrent les stratégies suivies par les autres au cours d'un processus d'apprentissage.
– Evolution. Si chaque espèce évolue de façon adaptée aux autres espèces, la résultante est un EN.