CHAPITRE 2

Aversion au risque

La théorie de l'utilité de von Neumann et Morgenstern nous dit que l'utilité associée à une loterie donnant un gain monétaire x avec probabilité $\frac{1}{2}$ et y avec probabilité $\frac{1}{2}$ est la moyenne entre les utilités de x et de y. Ce que la théorie de von Neumann et Morgenstern ne nous dit pas, c'est comment se comparent cette utilité avec celle du gain monétaire de $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. C'est ce que nous étudions dans ce chapitre, qui concerne les préférences de l'agent face au risque.

Les objectifs de ce chapitre sont :

- Définir un agent averse au risque ou qui aime le risque
- Caractériser les fonctions d'utilité correspondantes.
- Etudier l'évolution du comportement face au risque avec la richesse.
- Mesurer cet aversion au risque ou cet amour du risque

1. Risque et utilités

Les gains et les pertes sont mesurées de manière monétaire. On considère donc des loteries à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $P = \{$ loteries sur $\mathbb{R}$ à support fini $\}$. En particulier, pour $z \in \mathbb{R}$, $\delta_z \in P$ représente la loterie qui donne z avec probabilité 1. Pour $z \in P$, $e(p)$ est l'espérance de p. Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $p \in P$, $\mathbf{E}_p z$ est l'espérance de f sous p.

On se dote d'une relation de préférences rationnelle $\succ$ sur P représentée par une fonction d'utilité de von Neumann et Morgenstern u.

On caractérise d'abord la croissance de l'utilité avec l'argent.

Proposition 1. *u est strictement croissante si et seulement si :*

$$\delta_z \succ \delta_{z'} \Leftrightarrow z > z'$$

On supposera par la suite u strictement croissante.

Définition 2.

- $\succ$ *est* **averse au risque** *si* $\delta_{e(p)} \succcurlyeq p$ *pour tout* $p \in P$.
- $\succ$ *est* **strictement averse au risque** *si* $\delta_{e(p)} \succ p$ *pour tout* $p \in P$.
- $\succ$ *est* **neutre au risque** *si* $\delta_{e(p)} \sim p$ *pour tout* $p \in P$.
- $\succ$ **aime le risque** *si* $\delta_{e(p)} \preccurlyeq p$ *pour tout* $p \in P$
- $\succ$ **aime strictement le risque** *si* $\delta_{e(p)} \prec p$ *pour tout* $p \in P$.

On a les caractérisations suivantes en termes de fonctions d'utilité.

Proposition 3.
- $\succ$ *est averse au risque si et seulement si* u *est concave.*
- $\succ$ *est strictement averse au risque si et seulement si* u *est strictement concave.*
- $\succ$ *est neutre au risque si* u *est affine.*
- $\succ$ *aime le risque si* u *est convexe.*
- $\succ$ *aime strictement le risque si* u *est strictement convexe.*

2. Risque et richesse

Un agent plus riche aimera-t-il plus/moins le risque qu'un agent moins riche ? Deux définitions sont possibles :
– Un même risque (en valeurs *absolues*) sera-t-il pris par un agent plus riche, moins riche ?
– Un même risque (en valeurs *relatives*) sera-t-il pris par un agent plus riche, moins riche ?

2.1. Risque absolu. On définit l'aversion au risque absolu en termes de préférences avant de la caractériser en termes d'utilités.

Définition 4. u *(ou* $\succ$*) présente une* aversion au risque (absolu) décroissante *[resp. croissante, resp. constante] si* $\forall\, q \in P,\ z, w, w' \in \mathbb{R}$ *t.q.* $w' > w$ *:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{w+q} u > u(w+z) \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{E}_{w'+q} u > u(w'+z) \\ \textit{resp.} \quad &\Leftarrow \\ \textit{resp.} \quad &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Dans le premier cas, si la loterie q est préférée à la somme z sûre lorsque la richesse est w, elle l'est aussi si la richesse est $w' > w$.

Proposition 5. *Supposons* u *deux fois différentiable. Alors* u *présente une aversion au risque décroissante [resp. croissante, resp. constante] si et seulement si la fonction :*

$$\lambda = -\frac{u''}{u'}$$

est décroissante [resp. décroissante, resp. constante].

λ s'appelle le **coefficient d'aversion au risque de Arrow-Pratt**. Il s'agit de la courbure de u normalisée par la dérivée.

La proposition suivante caractérise l'aversion pour le risque absolu constante :

PROPOSITION 6. *Supposons u deux fois différentiable. Alors u présente une aversion au risque constante si et seulement si il existe $a > 0$ et b tels que :*

$$u(z) = \begin{cases} az + b & si \quad \lambda(z) \equiv 0 \\ -ae^{-\lambda z} + b & si \quad \lambda(z) \equiv \lambda > 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que les préférences sont représentables par une fonction d'utilité u qui peut être de deux types :

$$u(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad \lambda(z) \equiv 0 \\ -e^{-\lambda z} & \text{si} \quad \lambda(z) \equiv \lambda > 0 \end{cases}$$

2.2. Risque relatif.

DÉFINITION 7. *u (ou $\succ$) présente une* aversion au risque (relatif) décroissante *[resp. croissante, resp. constante] si $\forall\ q \in P$ t.q. $q \geq 0$ avec pba. 1, $z > 0$ $w' > w$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{wq}u > u(wz) \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{E}_{w'q}u > u(w'z) \\ \textit{resp.} \quad &\Leftarrow \\ \textit{resp.} \quad &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Dans le premier cas, si on préfère multiplier sa richesse par la loterie q plutôt que par z lorsque la richesse est w, on le préfère aussi si la richesse est $w' > w$.

PROPOSITION 8. *Supposons u deux fois différentiable. Alors u présente une aversion au risque relatif décroissante [resp. constante] si et seulement si la fonction :*

$$z \longrightarrow -\frac{zu''(z)}{u'(z)}$$

est décroissante [resp. constante].

PROPOSITION 9. *Supposons u deux fois différentiable. Alors u présente une aversion au risque relatif constante si et seulement si il existe $a > 0$ et b tels que :*

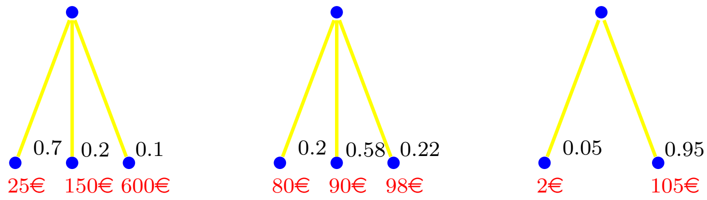
$$u(z) = \begin{cases} a\ln(z) + b \\ a\gamma z^{\gamma} + b & \textit{pour un certain } \gamma < 1, \gamma \neq 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que les préférences sont représentables par une fonction d'utilité u qui est d'un des trois types suivants :

$$u(z) = \begin{cases} \ln(z) \\ -z^{\gamma} & \text{pour un certain } \gamma < 0 \\ z^{\gamma} & \text{pour un certain } 0 < \gamma < 1 \end{cases}$$

3. Application

Supposons que vous ayez le choix entre les loteries suivantes :



A-t-on une manière objective de choisir entre ces loteries ?

Une méthode possible est de supposer une fonction d'utilité de von Neumann et Morgenstern, avec une aversion au risque constante *pour ces valeurs monétaires*. Il reste à déterminer le coefficient d'aversion au risque λ.

On peut déterminer λ en répondant à la question suivante : Combien donneriez-vous pour une loterie offrant 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 500 € avec probabilité $\frac{1}{2}$?

Il est ensuite possible d'évaluer l'utilité pour chacune des loteries, et de déterminer celle qui maximise l'utilité.

CHAPITRE 3

Théorie de la décision dynamique

1. Introduction

Nous considérons des situations dans lesquelles une suite de décisions doit être prise par l'agent. On montre comment décrire ces situations par des arbres de décision, et comment décrire un comportement de l'agent par une stratégie. On verra aussi comment rechercher les stratégies optimales de l'agent, c'est-à-dire celles qui maximisent son utilité.

2. Décision dynamique en information parfaite

2.1. Description d'un problème de décision. Un problème de décision dynamique en information parfaite est donné par

- T ensemble fini de nœuds, $Z \subset T$ nœuds terminaux, et pour $t \notin Z$:
  - $i(t) \in \{N, J\}$ qui détermine si la nature (N) ou le joueur (J) joue en t ;
  - L'ensemble de choix possibles au nœud t, $A(t)$;
  - Le nœud successeur résultant du choix a, $N(t, a)$;
  - Une distribution $D(t)$ sur $A(t)$ si $i(t) = N$.
- $u : Z \to \mathbb{R}$ fonctions d'utilité du joueur ;

On définit ainsi les successeurs d'un nœud

- $s(t) = \{N(t, a), a \in A(t)\}$ ensemble des successeurs directs de t. ($\emptyset$ si $t \in Z$).
- $S(t) = s(t) \cup s(s(t)) \cup s(s(s(t)))$... tous les successeurs de t.

On suppose que le problème a une structure d'arbre, c'est à dire :

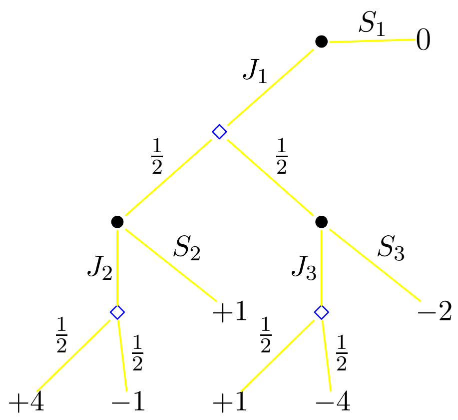
- Il n'y a pas de cycle : $\forall t, t \notin S(t)$
- Il existe un nœud initial $\exists \tilde{t}, S(\tilde{t}) \cup \{\tilde{t}\} = T$
- Chaque nœud a un unique prédécesseur

Exemple 1. *Exemple : casino.*
• *1ère étape : Le joueur peut décider de jouer ou non.*
S'il ne joue pas le jeu s'arrête.
Sinon, la nature tire à pile ou face s'il gagne 1 ou perd 2.

• *2ème étape : Le joueur peut décider de jouer ou non.*
S'il ne joue pas le jeu s'arrête.
S'il joue, la nature tire à pile ou face s'il gagne 3 ou perd 2 (en plus

des gains et pertes de la première étape).

On représente ce jeu par l'arbre suivant :



Les nœuds $\bullet$ *sont ceux où le joueur prend une décision. Les décisions possibles au premier nœud de l'agent sont* J_1 *et* S_1*,* J_2 *et* S_2 *pour le deuxième, et* J_3 *et* S_3 *pour le troisième. Les nœuds* $\diamond$ *sont ceux où la nature tire au hasard. Les branches suivant ces nœuds sont affectées des probabilités que la nature accorde à chacun d'entre eux. Les nœuds affectés de nombres sont les nœuds terminaux, où nous avons représenté le gain monétaire final de l'agent.*

2.2. Description d'un comportement : stratégie. Une stratégie s pour l'agent associe une décision dans $A(t)$ à tout nœud t tel que $i(t) = J$. C'est donc une application de $i^{-1}(J)$ vers $\cup_t A(t)$ telle que $s(t) \in A(t)$ pour tout t.

A toute stratégie du joueur correspond une probabilité $p(s)$ sur les nœuds terminaux, éléments de Z. Pour calculer $p(s)$, on part du nœud initial, et on descend progressivement d'une étape à la fois, pour calculer les probabilités des successeurs, en utilisant à un nœud t tel que $i(t) = N$ la probabilité $D(t)$, et à un nœud t tel que $i(t) = J$ la décision $s(t)$.

On a donc une utilité espérée $U(s) = \mathbf{E}_{p(s)} u(z)$ pour chaque stratégie. Une stratégie maximisatrice est une stratégie qui maximise ce paiement espéré.

Exemple 2. *On a dans le problème précédent 3 nœuds de décision pour l'agent, avec à chacun d'entre eux 2 décisions possibles. Par conséquent il y a 8 stratégies possibles.* $J_1S_2S_3$ *joue à la première étape et s'arrête ensuite.* $J_1S_2J_3$ *joue a la première étape, puis continue si elle a perdu à la première, et arrête sinon.* $S_1J_2J_3$ *peut s'entendre comme "ne pas jouer, mais si on avait joué à la première étape, on aurait décidé de continuer à la seconde". Ce n'est pas la même chose que* $S_1S_2S_3$ *qui d'arrête à la première étape, mais décide aussi de s'arrêter* *si on lui demande ce qu'elle ferait à la deuxième.*

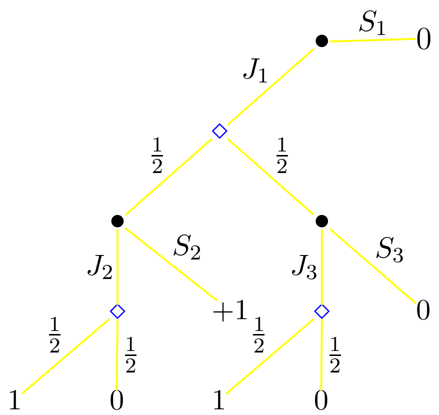
Les gains espérés de ces stratégies sont :

– $J_1S_2S_3$ *donne* $-\frac{1}{2}$
– $J_1S_2J_3$ *donne* 0
– $S_1J_2J_3$ *et* $S_1S_2S_3$ *donnent* 0.

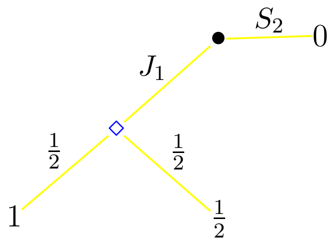
2.3. Principe d'induction à rebours. Le principe d'induction à rebours permet de trouver une stratégie maximisatrice. On part du bas de l'arbre, et pour les dernières décisions de l'agent, on choisit la meilleure action. On remplace ensuite le nœud correspondant par l'utilité espérée étant donnée cette meilleure action. On obtient ainsi un nouveau problème de décision dynamique, auquel on applique de nouveau le principe, et ainsi de suite... A la fin de la procédure, on aura choisi une décision pour chaque nœud, on aura donc obtenu une stratégie dans le problème de décision. On a le résultat suivant :

Proposition 10. *Toute stratégie obtenue par le principe d'induction à rebours est maximisatrice.*

Exemple 3. *Question : Comment maximiser la probabilité de finir avec un gain d'au moins 1 dans l'exemple précédent ? Ceci revient à chercher une stratégie maximisatrice lorsque l'utilité vaut 1 pour les gains de 1 au moins, et 0 sinon. On a alors l'arbre :*

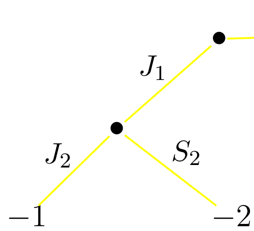


Appliquons le principe d'induction à rebours à cette arbre. On voit qu'il faut décider S_2 *au deuxième nœud, et* J_3 *au troisième. On obtient l'arbre dans lequel on a remplacé les derniers nœuds de décisions par le gain espéré maximal :*

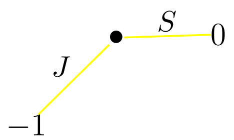


On voit que dans ce jeu la meilleure décision est de jouer J_1 au premier nœud. On a donc obtenu comme stratégie la stratégie $J_1S_2J_3$ qui maximise la probabilité de terminer le jeu avec un paiement d'au moins 1.

Une remarque importante sur la notion de stratégie et sur le principe d'induction à rebours. Le principe d'action à rebours indique quelle choix prendre, même aux nœuds qui ne devraient pas être atteints. Par exemple, regardons le jeu suivant :



Le principe d'induction à rebours nous dit tout d'abord qu'il faut choisir J_2 au deuxième nœud, et transforme le problème en :



On voit donc qu'il faut choisir S_1 au premier nœud. La procédure d'induction à rebours aboutit donc à la stratégie S_1J_2. C'est parce qu'on a conclut qu'il fallait jouer J_2 et que le gain correspondant est de -1 qu'on a pu ensuite conclure qu'il fallait jouer S_1.

3. Décision dynamique en information imparfaite

On suppose maintenant que l'agent n'est pas complètement informé de tous les coups de la nature. Au moment où il effectue ses choix, il n'a qu'une information imparfaite sur sa position dans l'arbre de décision. Nous commençons par décrire son information dans l'arbre à l'aide de la notion d'ensembles d'information.

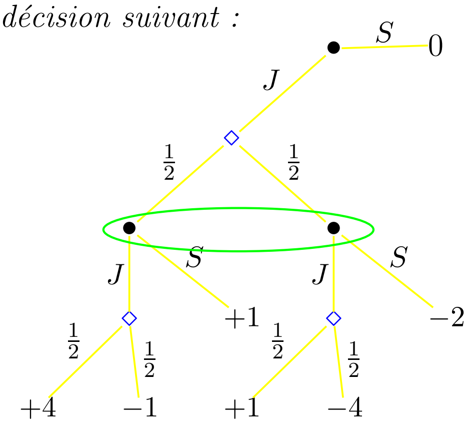
Un ensemble d'information est une classe d'équivalence sur les nœuds t tels que $i(t) = J$. Soit $h(t)$ la classe d'équivalence du nœud t, c'est-à-dire l'ensemble d'information comprenant le nœud t. Comme h décrit des relations d'équivalence on a :

$$t' \in h(t) \Rightarrow t \in h(t')$$

On suppose que l'agent connaît son ensemble de décisions à chaque nœud. L'ensemble d'information $h(t)$. On a la restriction suivante sur la fonction qui à t associe $h(t)$:

$$t' \in h(t) \Rightarrow A(t') = A(t)$$

EXEMPLE 4. *Reprenons l'exemple du casino en supposant qu'après la première étape, le joueur ne sait pas s'il a gagné ou non. On a l'arbre de décision suivant :*



Un premier ensemble d'information est donné par le nœud au début du jeu. Un deuxième contient les deux nœuds qui suivent le choix de la nature après une première décision de jouer.

Une stratégie s est une fonction de l'ensemble des *ensembles d'information* vers les décisions possibles. On peut voir s comme une application de $i^{-1}(J)$ vers $\cup_t A(t)$ telle que :
- $s(t) = s(t')$ si $h(t) = h(t')$ ($s(t)$ ne dépend que de l'ensemble d'information de t)
- $s(t) \in A(t)$ pour tout t.

EXEMPLE 5. *On a deux ensembles d'information, et deux décisions possibles pour chacun d'entre eux, soient 4 stratégies. JS, JJ, SJ et SS. Les paiement espérés correspondants sont :*
- *JS donne* $-\frac{1}{2}$
- *JJ donne* 0

– *SJ et SS donnent* 0.

Exemple 6. *Rechercher les stratégies qui maximisent la probabilité de gagner au moins 1 dans ce dernier jeu.*