CHAPITRE 1

Théorie de la décision

1. Introduction

La théorie de la décision modélise le comportement d'un agent face à des situations de choix. Nous décrivons les choix d'un agent, et les relions a une notion de préférences. Nous montrons sous quelles conditions les relations de préférences peuvent être représentées par une fonction d'utilité, et quand elles impliquent l'existence de croyances de l'agent sur les différents états du monde, représentables par des probabilités.

2. Choix et préférences

Nous commençons par décrire des préférences d'un agent, et des choix, et établissons un lien naturel entre ces deux notions.

2.1. Choix. Nous partons d'un ensemble fini X d'alternatives. Un agent peut effectuer un choix parmi un sous-ensemble de X d'alternatives qui lui sont proposées. Soit dont 2^X l'ensemble des parties de X.

DÉFINITION 1. *Une fonction de choix est la donnée de* $c\colon 2^X\backslash\{\emptyset\} \to 2^X\backslash\{\emptyset\}$ *telle que pour tout* $A \subset X$*,* $c(A) \subset A$.

L'interprétation est la suivante : si l'agent a le choix entre les éléments de A, cet agent dira que tous les éléments de $c(A)$ conviennent, ou bien choisira indifféremment parmi les elements de $c(A)$.

Certaines fonctions de choix vérifient des propriétés qui les rendent plus "plausibles" que d'autres. Nous étudierons plus particulièrement l'influence des axiomes suivant, appelés axiomes (α) et (β) de Sen :

- (α) **:** Si $x \in B \subset A$ et $x \in c(A)$, alors $x \in c(B)$
- (β) **:** Si $x, y \in c(A)$, $A \subseteq B$, et $y \in c(B)$, alors $x \in c(B)$.

On peut traduire ces axiomes en langage courant de la manière suivante : Pour l'axiome (α), "Si le champion du monde d'un jeu est pakistanais, alors ce pakistanais doit aussi être champion du Pakistan." Pour l'axiome (β), "Si le champion du monde est pakistanais, alors tous les champions du Pakistan sont aussi champions du monde."

2.2. Préférences.

DÉFINITION 2. *Une relation de préférences* $\succ$ *est la donnée d'un ensemble de paires d'éléments* (x, y) *de* $X \times X$ *pour lesquels nous* *écrivons $x \succ y$. La relation $x \succ y$ est interprétée par : "l'agent préfère strictement x à y".*

Voici une liste d'axiomes sur les relations de préférences :

Asymétrie $x \succ y \Rightarrow \neg y \succ x$. Si x est strictement préféré à y, alors y n'est pas strictement préféré à x.

Transitivité $(x \succ y$ et $y \succ z) \Rightarrow x \succ z$.

Irreflexivité $\neg x \succ x$. Il n'existe pas de x strictement préféré à lui-même.

Transitivité négative $(\neg x \succ y$ et $\neg y \succ z) \Rightarrow \neg x \succ z$.

Acyclicité $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n \Rightarrow \neg x_n \succ x_1$. Si chaque x_i est strictement préféré à x_{i+1}, alors x_n n'est pas préféré à x_1.

DÉFINITION 3. *Nous dirons qu'une relation de préférences est rationnelle si elle est asymétrique et négativement transitive.*

Une relation de préférences ainsi définie possède forcément les autres propriétés de la liste :

PROPOSITION 4. *Une relation de préférences rationnelle est irreflexive, transitive, et acyclique.*

Une relation de préférences rationnelle est un ordre partiel.

A partir d'une relation binaire $\succ$, nous pouvons définir une relation de préférences faibles $\succeq$ et une relation d'indifférence $\sim$ par :

$$\begin{aligned} x \succeq y &\quad \text{si} \quad \neg y \succ x \\ x \sim y &\quad \text{si} \quad \neg y \succ x \text{ et } \neg x \succ y \end{aligned}$$

Voici quelques propriété des relations $\succeq$ et $\sim$ lorsque $\succ$ est rationnelle.

PROPOSITION 5. *Supposons que $\succ$ est une relation de préférences rationnelle, alors*
- *Pour tout x et y, on a soit $x \succ y$, soit $y \succ x$, soit $x \sim y$.*
- *$x \geq y$ est complête (on a toujours $x \geq y$ ou $y \geq x$) et transitive.*
- *$\sim$ reflexive ($x \sim x$ pour tout x), symétrique ($x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$), et transitive.*
- *$w \succ x$, $x \sim y$ et $y \succ z$ impliquent $w \succ y$ et $x \succ z$.*
- *$x \geq y$ si et seulement si $x \succ y$ ou $x \sim y$.*
- *$x \geq y$ et $y \geq x$ si et seulement si $x \sim y$.*

2.3. Lien entre choix et préférences. Deux idées simples et importantes relient les choix et les préférences. Si un agent possède des préférences, ceci doit avoir une implication en termes de choix. Lorsqu'on cherche quelles sont les relations de préférences compatibles avec des choix (s'il en existe), on parle de préférences révélése.

2.3.1. *Comment les préférences définissent des choix.* Soit $\succ$ une relation binaire sur X. On définit une fonction $c(\cdot, \succ)$ par :

$$c(A, \succ) = \{x \in A\colon \text{ pour tout } y \in A \ \neq y \succ x\}$$

$c(A, \succ)$ est donc le sous-ensemble des éléments de A qui ne sont pas dominés par d'autres éléments de A. Si $\succ$ représente les préférences de l'agents, alors ses choix doivent obéir a $c(\cdot, \succ)$. Sous quelles conditions sommes-nous sûrs que $c(\cdot, \succ)$ est une fonction de choix ?

Proposition 6. *Étant donnée une relation binaire $\succ$, $c(\cdot, \succ)$ est une fonction de choix si et seulement si $\succ$ est acyclique.*

Montrons que l'acyclicité implique $c(B, \succ) \neq \emptyset$. C'est une consequence de X fini. Réciproquement, $\succ$ n'est pas acyclique, soit $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n \succ x_1$. On a alors $c(\cdot, \succ)(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \emptyset$.

2.3.2. *Représentation des choix par des préférences rationnelles.* Nous partons maintenant d'une fonction de choix c, et cherchons sous quelles conditions il existe une relation de préférences rationnelle $\succ$ telle que c soit la fonction de choix correspondant à $\succ$ ($c(\cdot, \succ) = c$).

Proposition 7. *Étant donnée une relation binaire $\succ$, il existe une relation rationnelle $\succ$ telle que $c = c(\cdot, \succ)$ si $\succ$ vérifie les axiomes (α) et (β) de Sen. De plus, cette relation est alors unique.*

Démonstration : Tout d'abord, supposons $c = c(\cdot, \succ)$, avec $\succ$ rationnelle. Pour montrer α, il suffit de remarquer que $\nexists y \in A, y \succ x$ implique $\nexists y \in B, y \succ x$, pour B sous-ensemble de A. Pour β, supposons $(x, y) \in c(A)$, on a alors $x \sim y$. Si $x \in c(B)$ avec $A \subset B$, $\forall z \in B$, $z \preceq x$, et donc $z \preceq y$ par transitivité, donc $y \in c(B)$.
Supposons maintenant que c vérifie α et β. L'unicité de $\succ$ provient de ce que $\succ$ doit vérifier $x \succ y$ si et seulement si $c(\{x, y\}) = \{x\}$. La reflexivité de $\succ$ est triviale. Pour la transitivité de $\succeq$, supposons $x \succeq y \succeq z$. Si $y \in c(\{x, y, z\})$ alors $z \in c(\{x, y, z\}$ (β). Sinon, on ne peut avoir $c(\{x, y, z\} = \{x\}$ (car alors on aurait $c(\{x, y, z\} = \{x\})$. Donc $z \in c(\{x, y, z\} = \{x\}$. On a donc aussi $z \in c(\{x, z\}$ (α), et $x \succeq z$. La relation $\succ$ est donc rationnelle. Il reste à montrer que $c = c(\cdot, \succ)$, c'est à dire que $x \in c(A)$ si et seulement si pour tout $y \in A$, $x \in c(\{x, y\})$. Pour la partie "seulement si", $\forall y$, $x \in c(\{x, y\})$, par l'axiome α. Pour la partie "si", soit $z \in c(A)$, alors $z \in c(\{x, z\})$ (α), donc $c(\{x, z\}) = \{x, z\}$, et (β) implique $x \in c(A)$.

Il suffit d'observer les choix faits par les agents (c) pour en déduire leurs préférences $(\succ)$. Pour cette raison, la conjonction des axiomes (α) et (β) est aussi appelée *axiome des préférences révélées.*

3. Représentation ordinale

Soit u une fonction sur X. On interprète $u(x)$ comme une utilité, ou plaisir, que l'agent peut retirer de l'alternative x. On appelle donc u

fonction d'utilité. Si u est la fonction d'utilité de l'agent, quelles doivent être ses préférences ? Simplement, définissons $\succ_u$ par

$$x \succ_u y \text{ si et seulement si } u(x) > u(y)$$

Il est aisé de vérifier que $\succ_u$ est bien une relation de préférences rationnelle. La proposition suivante nous dit aussi que toute relation de préférences résulte d'une fonction d'utilité (X est fini).

PROPOSITION 8. *Supposons que X est fini, et soit $\succ$ une relation binaire sur X. Il existe une fonction d'utilité u telle que $\succ_u = \succ$ si et seulement si $\succ$ est rationnelle.*

Preuve : par induction sur le cardinal de X.

La proposition 8 s'étend au cas X dénombrable.

PROPOSITION 9. *Supposons X dénombrable, et soit $\succ$ une relation binaire sur X. Il existe une fonction d'utilité u telle que $\succ_u = \succ$ si et seulement si $\succ$ est rationnelle.*

Nous pouvons nous poser la question de l'unicité de la représentation d'une relation de préférences par une fonction d'utilité. Il est évident que la composition de u par une fonction strictement croissante ne change par $\succ_u$. La proposition suivante nous donne une réciproque :

PROPOSITION 10. *Soient u et u' deux fonctions d'utilité sur X (fini). Alors $\succ_u = \succ_{u'}$ si et seulement si il existe une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*
- *f est strictement croissante*
- *$u' = f \circ u$*

On commence par définir f sur $\{u(x), x \in X\}$. Puis on l'étend à $\mathbb{R}$.

4. Préférences sur choix incertains

Introduction. Expliquer la différence entre choix incertains dont on peut évaluer les probabilités de manière objective ou non.

4.1. Préférences sur les probabilités objectives. Soit Z un ensemble fini, appelé ensemble de prix. Soit $P = \Delta(Z)$ l'ensemble des lois de probabilités sur Z, appelé ensemble des loteries. Nous étudions maintenant des relations de préférences sur P. P est donc l'ensemble de choix.

Il est remarquable que P a une structure particulière, appelée structure de simplexe. Nommément :
- P est convexe. Pour deux éléments p et q de P, et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda p + (1-\lambda)q \in P$, où $(\lambda p + (1-\lambda)q)(x)$ vaut par définition $\lambda p(x) + (1-\lambda)q(x)$.
- On peut identifier chaque $z \in Z$ à l'élément de P qui donne une probabilité de 1 à z, et 0 aux autres.

On définit maintenant des axiomes sur la relation de préférences $\succ$ de P qui utilisent la structure particulière de P.

Rationalité $\succ$ est une relation de préférences rationnelle.

Indépendance Pour $p, q, r \in P$, et $0 < \lambda \leq 1$, $p \succ q$ implique $\lambda p + (1-\lambda)r \succ \lambda q + (1-\lambda)r$

Continuité Pour $q \in P$, les ensembles $\{p, p \succ q\}$ et $\{p, q \succ p\}$ sont ouverts

L'axiome de continuité se comprend lorsqu'on se rappelle que $\succ$ représente une relation de préférences stricte. Si $p \succ q$, alors si on modifie de manière extrêmement mince p en p' et q en q' on aura $p' \succ q'$.

4.2. Utilité espérée. Supposons que l'agent associe une valeur, ou utilité $u(z)$ à chacun des prix $z \in Z$. La fonction u définit une fonction $\tilde{u}$ de P vers $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\tilde{u}(p) = \sum\nolimits_z p(z)u(z)$$

Soit $\succ_{\tilde{u}}$ la relation de préférences sur Z associée à $\tilde{u}$.

Remarquons que nous n'avons aucune raison de supposer *a priori* que les préférences de l'agent soient de la forme $\succ_{\tilde{u}}$, pour un u donné, ni encore qu'il existe u telle que $\succ = \succ_{\tilde{u}}$. Il peut d'ailleurs sembler à première vue que cette forme de préférences est restrictive et très particulire. Cependant, cette forme de préférences est très commode pour le modélisateur (nous), ou pour un agent cherchant à évaluer ses préférences entre des loteries, car la donnée d'utilités associées aux événements certains (les prix de Z) à elle seule définit les préférences sur l'ensemble beaucoup plus complexe des loteries.

4.3. Théorème de von-Neumann et Morgenstern. Le résultat de von-Neumann et Morgenstern est l'équivalence entre une famille d'axiomes sur $\succ$ et l'existence d'une représentation de la forme $\succ_{\tilde{u}}$.

PROPOSITION 11. *Il existe une fonction $u : Z \to \mathbb{R}$ telle que $\succ = \succ_{\tilde{u}}$ si et seulement si $\succ$ vérifie les axiomes de préférences, d'indépendance et de continuité.*

Démonstration de la partie "si" Il suffit de montrer que $\succ_{\tilde{u}}$ vérifie les propriétés requises.

Démonstration de la partie "seulement si" Pour $z \in Z$, on note δ_z l'élément de P qui met probabilité 1 sur Z. Si pour tous $x, y \in Z$, $\delta_x \sim \delta_y$, alors pour tous $p, p' \in P$, $p \sim p'$ (indépendance), et toute fonction u constante convient. Dans le cas contraire, on sélectionne parmi l'ensemble $\{\delta_z,\ z \in Z\}$ un élément minimal δ_{x_0}, et un élément maximal δ_{x_1} pour $\succ$. D'après l'axiome de continuité, pour chaque z, il existe un unique $\lambda_z \in [0,1]$ tel que $z \sim \lambda_z \delta_{x_1} + (1-\lambda_z)\delta_{x_0}$. On pose alors $u(z) = \lambda_z$.

On a donc $u(x_0) = 0$, $u(x_1) = 1$, et pour $p \in P$ $\tilde{u}(p) = \sum_k p(z)\lambda(z)$. Soient p et p' dans P.

$$\begin{aligned}
p \succ p' \quad \Leftrightarrow \quad & \sum\nolimits_z p'(z)(\lambda_z\delta_{x_1} + (1-\lambda_z)\delta_{x_0}) \succ \sum\nolimits_z p'(z)(\lambda_z\delta_{x_1} + (1-\lambda_z)\delta_{x_0}) \\
\Leftrightarrow \quad & (\sum\nolimits_z p(z)\lambda(z))\delta_{x_1} + (\sum\nolimits_z p(z)(1-\lambda(z)))\delta_{x_0} \succ \\
& (\sum\nolimits_z p(z)'\lambda(z))\delta_{x_1} + (\sum\nolimits_z p(z)'(1-\lambda(z)))\delta_{x_0} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum\nolimits_z p(z)\lambda(z) > \sum\nolimits_z p'(z)\lambda(z) \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{u}(p) > \tilde{u}(p')
\end{aligned}$$

PROPOSITION 12. *Deux fonctions d'utilité $\tilde{u}$ et $\tilde{u}'$ sur P sont associées aux mêmes préférences si et seulement il existe $a > 0$ et b tels que $\tilde{u}' = a\tilde{u} + b$.*

Démonstration de la partie "si" est évidente.
Démonstration de la partie "seulement si" Supposons que $\succ_{\tilde{u}} = \succ_{\tilde{u}'}$, et soient δ_{x_0}, δ_{x_1} un élément minimal et un élément maximal. Pour tout $p \in P$, écrivons $\tilde{u}(p) = \frac{u(x_1)-\tilde{u}(p)}{u(x_1)-u(x_0)}u(x_0) + \frac{\tilde{u}(p)-u(x_0)}{u(x_1)-u(x_0)}u(x_1)$. Donc $p \sim_{\tilde{u}} \frac{u(x_1)-\tilde{u}(p)}{u(x_1)-u(x_0)}\delta_{x_0} + \frac{\tilde{u}(p)-u(x_0)}{u(x_1)-u(x_0)}\delta_{x_1}$. Comme $\sim_{\tilde{u}} = \sim_{\tilde{u}'}$,

$$\frac{u(x_1) - \tilde{u}(p)}{u(x_1) - u(x_0)} = \frac{u'(x_1) - \tilde{u}(p)}{u'(x_1) - u'(x_0)}$$

Cad.

$$\tilde{u}'(p) = \frac{u'(x_1) - u'(x_0)}{u(x_1) - u(x_0)}u(p) - \frac{u'(x_1) - u'(x_0)}{u(x_1) - u(x_0)}u(x_1) + u'(x_1)$$

ce qui est bien la forme recherchée.

4.4. Préférences et incertain subjectif. Dans une loterie, l'agent à un moyen objectif d'estimer la probabilité de chaque prix. En revanche, dans un événement comme une course de chevaux par exemple, il n'existe pas de moyen objectif de connaître la probabilité que tel ou tel cheval soit vainqueur. La théorie de Anscombe et Aumann nous donne des conditions sous lesquelles l'agent se comporte *comme si* il possédait une croyance sur les chevaux vainqueurs, et effectuait ses choix (ici des paris) en maximisant son utilité espérée étant donnée cette croyance. Ces probabilités sont dites probabilités subjectives.

4.4.1. *Paris sur des loteries.* S est un ensemble fini de possibilités incertaines (comme les chevaux gagnants dans le cas de la course). Z est un ensemble fini de prix, et P représente les probabilités sur Z. A chaque élément de S, faisons correspondre un prix aléatoire. Imaginons que pour chaque élément de S, une loterie puisse être tirée pour déterminer le prix dans Z. On définit alors une loterie composée comme un vecteur $h = (h_s)_{s \in S}$ de P^S. L'ensemble de choix que nous considérons maintenant l'ensemble $H = P^S$ des loteries composées.

Exemples de loteries composées :

– S'il pleut, mon cheval préféré Rossinante a 45% de chances de remporter la course, et seulement 20% de chances s'il ne pleut pas.
– Si l'économie est en croissance l'an prochain, j'ai une chance sur deux d'obtenir une promotion, et une chance sur trois sinon.

Remarquons que H a lui aussi une structure de simplexe. En particulier, si $h, h' \in H$ et si $\lambda \in [0,1]$, h'' défini par $h''_s(z) = \lambda h_s(z) + (1-\lambda)h'_s(z)$ appartient à H.

4.4.2. *Les axiomes.* Supposons que l'agent a des préférences sur H, représentées par $\succ$. Comme dans le cas des probabilités objectives, soient les axiomes suivants sur $\succ$.

Axiome de préférences $\succ$ est une relation de préférences (sur H).

Axiome d'indépendance Pour $h, h', h'' \in H$, et $0 < \lambda \leq 1$, $h \succ h'$ implique $\lambda h + (1-\lambda)h'' \succ \lambda h + (1-\lambda)h'$

Axiome de continuité Pour $h, h', h'' \in H$, si $h \succ h' \succ h''$ il existe $0 < \lambda, \mu < 1$ tels que $\lambda h + (1-\lambda)h'' \succ h' \succ \mu h + (1-\mu)h''$

4.4.3. *Utilité dépendante de l'état.* Comme pour le cas des fonctions d'utilité de von-Neumann et Morgenstern, nous pouvons caractériser les relations de binaires qui vérifient les axiomes de préférences, d'indépendance et de continuité.

PROPOSITION 13. *Une relation binaire $\succ$ vérifie les axiomes de préférences, d'indépendance et de continuité si et seulement si il existe une famille $u = (u_s)_{s\in S}$ d'applications $u_s \colon Z \to \mathbb{R}$ telles que*

$$h \succ h' \Leftrightarrow \sum_{s\in S} \sum_{z\in Z} h_s(z)u_s(z) > \sum_{s\in S} \sum_{z\in Z} h'_s(z)u_s(z)$$

La démonstration est la même que celle du théorème de von-Neumann et Morgenstern. On peut alors poser $\tilde{u}_s(z) = \sum_z h_s(z)u_s(z)$, utilité de von-Neumann et Morgenstern dans l'état du monde s.

4.4.4. *Utilité indépendante de l'état et probabilités subjectives.* Nous allons introduire un axiome disant que les préférences ne dépendent pas de l'état du monde. Soit donc $\succ_{\tilde{u}_s}$ la relation de préférences dans l'état s.

Indépendance de l'état $\succ_{\tilde{u}_s}$ ne dépend pas de s.

Selon l'axiome d'indépendance de l'état, si p est préféré à p' dans un état s, il est aussi préféré à p' dans tous les états s'.

Dans ce cas, fixons un état s_0, et posons $\tilde{u} = \tilde{u}_{s_0}$. On a pour tout état s l'existence de réels $a_s > 0, b_s$ tels que , $\tilde{u}_s = a_s\tilde{u}_{s_0} + b_s$. On peut donc écrire :

$$\sum_s \tilde{u}_s(h_s) = \sum_s a_s\tilde{u}_{s_0}(h_s) + \sum_s b_s$$

On a donc $h \succ h'$ si et seulement si :

$$\sum_s a_s\tilde{u}_{s_0}(h_s) > \sum_s a_s\tilde{u}_{s_0}(h'_s)$$

Posons alors $\pi(s) = \frac{a_s}{\sum_s a_s}$. Tous les $\pi(s)$ sont positifs, et leur somme vaut 1. On peut donc interpréter $\pi = (\pi(s))_s$ comme une probabilité sur S. On a alors $h \succ h'$ si et seulement si :

$$\sum_s \pi(s)\tilde{u}_{s_0}(h_s) > \sum_s \pi(s)\tilde{u}_{s_0}(h'_s)$$

Tout se passe donc comme si les préférences de l'agent étaient représentées par les préférences $\tilde{u}$, et par une probabilité π sur S. Il est naturel d'interpréter π comme les *croyances* de l'agent sur S. Ces croyances ne sont pas une donnée objective, on parle de croyances *subjectives* de l'agent.

5. Exercices

5.1. Exercice 1. Soit l'axiome suivant, appelé Axiome de Houthakker, portant sur une fonction de choix c :
Si $x, y \in A \cap B$, et si $x \in c(A)$ et $y \in c(B)$, alors $x \in c(B)$.
Montrer que l'axiome de Houthakker est équivalent a la conjonction des axiomes α et β de Sen.

5.2. Exercice 2. Montrer la proposition 4

5.3. Exercice 3. Une relation de préférences non représentable par une fonction d'utilité. Sur $X = [0,1] \times [0,1]$, on définit la relation de préférences entre $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par $x \succ y$ si et seulement si $x_1 > y_1$, ou ($x_1 = y_1$ et $x_2 > y_2$). C'est donc l'ordre lexicographique sur X.

(1) Montrer que $\succ$ est rationnelle.
(2) Montrer que $\succ$ n'est représentable par aucune fonction d'utilité. C'est à dire, montrer qu'il n'existe pas d'application u de X vers $\mathbb{R}$ telle que $x \succ y$ si et seulement si $u(x) > u(y)$.

5.4. Exercice 4. Montrer la proposition 4.

5.5. Exercice 5. On a deux actifs financiers. Le premier paye 100 dollars dans l'état du monde 1 (reprise de l'économie américaine), et 50 dollars dans l'état du monde 2 (pas de reprise de l'économie américaine). Le deuxième paye 120 dollars dans l'état du monde 1 et 20 dans l'état du monde 2. Sur les marchés, le prix du premier actif financier est de 80 euros, celui du second de 70 euros. Dans le "Financial Times" vous lisez le commentaire suivant, "d'après le marché, l'état du monde 1 et l'état du monde 2 ont les mêmes chances de ce réaliser."

(1) Ce commentaire est-il en rapport avec les prix que vous observés ?
(2) Selon vous, quelles sont les probabilités subjectives du marché sur l'état 1 et sur l'état 2 ?

5.6. Exercice 6 : Paradoxe d'Allais. On a comme ensemble d'alternatives $X = \{2500000€, 500000€, 0€\}$, où 2500000€correspond au fait de gagner cette somme, etc.... On a les loteries $p_1 = (0, 1, 0)$, $p'_1 = (0.1, 0.89, 0.01)$, $p_2 = (0, 0.11, 0.89)$ et $p'2 = (0.1, 0, 0.9)$. (Par exemple, avec p_2, la probabilité de gagner 2500000€ est de 0.11.

(1) On suppose qu'un individu préfère p_1 à p'_1, et p'_2 à p_2. Est-ce consistant avec l'utilité espérée de von-Neumann et Morgenstern ?

5.7. Exercice 7 : Paradoxe de Machina. $X = \{$voyage à Venise, beau film sur Venise, rien $\}$, et $p_1 = (0.999, 0.001, 0)$, $p'_1 = (0.999, 0, 0.001)$. Si un agent préfère voir un beau film sur Venise plutôt que rien, et préfère p'_1 à p_1, est-ce consistant avec la théorie de l'utilité espérée de von-Neumann et Morgenstern ? Comment peut-on expliquer de telles préférences ?