Habilitation à diriger les recherches

Une approche stratégique de l'économie de l'information

soutenue par Olivier Gossner

le 26 novembre 2004

à l'Université de Paris Dauphine

discipline : Sciences Économiques

devant un jury composé de :

Jacques Crémer, Directeur de Recherche au GREMAQ, Université Toulouse 1, rapporteur

Ivar Ekeland, Professeur à l'Université de British Columbia

Françoise Forges, Professeur à l'Université de Paris Dauphine, coordinateur

Pierre-Marie Larnac, Professeur à l'Université de Paris Dauphine

Sylvain Sorin, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie

Shmuel Zamir, Professeur à l'Université Hébraïque de Jerusalem, rapporteur

Remerciements

La recherche consiste souvent en un long travail solitaire, cependant les liens sociaux forment certainement l'aspect le plus enrichissant de ce métier. De même qu'on ne peut énumérer les arbres d'une forêt, il m'est impossible de citer tous ceux qui de près ou de loin ont influencé mes travaux et enrichi ma pensée, car ils constituent un immense corps humain et social.

J'ai énormément bénéficié du travail d'équipe avec mes co-auteurs : le regretté Bruno Bassan, Penélope Hernández, Rida Laraki, Nicolas Melissas, Jean-François Mertens, Abraham Neyman, Pierre Picard, Marco Scarsini, Tristan Tomala, Nicolas Vieille, et Shmuel Zamir. Je souhaite les en remercier.

Mon entière gratitude s'exprime envers mon institution, le CNRS, ainsi qu'aux laboratoires d'accueil THEMA et CERAS, pour la confiance qu'ils ont placée en moi, la complétude des moyens de travail qu'ils ont mis à ma disposition, et l'entière liberté scientifique qu'ils m'ont accordée.

Les membres du jury de cette habilitation à diriger les recherches me font l'honneur d'avoir bien voulu consacrer de leur temps et de leur attention à mes travaux. Je souhaite exprimer ma gratitude la plus sincère à Jacques Crémer, Ivar Ekeland, Pierre-Marie Larnac, Sylvain Sorin, Shmuel Zamir, et plus particulièrement à Françoise Forges qui a accepté la tâche de coordonner cette habilitation.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Thèmes de recherche

1.1.1 Strategies mixtes non observables

Par opposition aux jeux en une étape dans lesquels les joueur ne participent au jeu qu'une seule fois, dans un jeu répété les joueurs interagissent successivement un certain nombre de fois, fini ou infini. Par conséquent, les actions choisies à une étape peuvent influencer les issues du jeu aux étapes suivantes.

Lorsqu'un joueur choisit ses actions de manière aléatoire (on dit qu'il joue en stratégies mixtes), il est naturel de supposer que seule son action, et non les probabilités utilisées pour la choisir, sont observées des autres joueurs. J'ai étendu les caractérisations de paiements d'équilibres de jeux répétés du cas des stratégies mixtes observées à l'hypothèse que seules les actions sont observées. Les publications dans ce domaine sont :

- "The folk theorem for finitely repeated games with mixed strategies", *International Journal of Game Theory*, 1995 **24** : 95-107.
- "Overlapping generations games with mixed strategies", *Mathematics of Operations Research*, 1996 **21** : 477-486.

1.1.2 Valeur de l'information

Les incitations à rechercher ou à échanger de l'information sont très liées à la valeur que peut avoir cette information. Or, de nombreux exemples sont connus où cette valeur est négative. J'ai identifié les raisons pour lesquelles une information pouvait avoir une valeur soit positive, soit négative, et étudié les conséquences de la valeur de l'information sur l'apprentissage. Les résultats ont donné lieu aux travaux :

- "Comparison of information structures", *Games and Economic Behavior*, 2000, **30** : 44-63.
- "Positive value of information in games", avec Bruno Bassan, Marco Scarsini et Shmuel Zamir, *International Journal of Game Theory*, **32** : 17-31.
- "Strategic learning in games with symmetric information", avec Nicolas Vieille, *Games and Economic Behavior*, 2003, **42** : 25-47.
- "Ability and Knowledge", travail en cours.
- "The value of information in zero-sum games", avec Jean-François Mertens, travail en cours.

1.1.3 Mesure de l'information

Une des questions posées par l'étude de l'information comme bien économique est celle de sa mesure. J'ai développé des applications à la théorie des jeux et à l'économie de la mesure de l'information par l'entropie dans les travaux suivants :

- "How to play with a biased coin ?", avec Nicolas Vieille, *Games and Economic Behavior*, 2002, **41** : 206-226.
- "Empirical distributions of beliefs under imperfect observation", avec Tristan Tomala, Cahier du CEREMADE 410, Université Paris Dauphine, 2004.
- "Secret correlation in repeated games with imperfect monitoring", avec Tristan Tomala, Cahier du CEREMADE 421, Université Paris Dauphine, 2004.
- "Online Matching Pennies", avec Penélope Hernández et Abraham Neyman, Discussion Paper Series 316, Center for Rationality and Interactive Decision Theory, Hebrew University, Jerusalem, 2003.
- "On the optimal use of coordination", avec Rida Laraki et Tristan Tomala, travail en cours.

– "Entropy and codification in repeated games with signals", avec Tristan Tomala, Cahier du CEREMADE 309, Université Paris Dauphine, 2003.
– "Dynamiques de communication", avec Penélope Hernández et Abraham Neyman, *Revue Économique*, **55** : 509-516 2004.

1.1.4 Rationalité limitée

Le paradigme économique d'un agent rationnel implique souvent que cet agent possède une capacité de calcul et d'évaluation des situations infinies. J'ai étudié l'impact d'une représentation des agents par les automates et les machines de Turing en temps polynomial dans les travaux :

– "On the complexity of coordination", avec Penélope Hernández, *Mathematics of Operations Research*, 2003, **28** : 127-141.
– "Coordination through DeBruijn sequences", avec Penélope Hernández, 2004.
– "Repeated games played by cryptographically sophisticated players", Cahier du THEMA 99-07, Université Paris Nanterre, 1999.
– "Sharing a long secret in a few public words", Cahier du THEMA 2000-15, Université Paris Nanterre, 2000.

1.1.5 Communication stratégique

Lorsqu'ils transmettent de l'information, les agents économiques stratégiques peuvent ne pas avoir intérêt à respecter les règles établies. Le modèle adapté est celui des équilibres en communication de Forges [For86]. J'ai étudié les incitations stratégiques des agents dans leurs activités de communication dans les travaux :

– "Secure protocols - or how communication generates correlation", Journal of Economic Theory, 1998 83 : 69–89.
– "Protocoles de communication robustes", *Revue Économique*, 1997 **48** : 685-695.
– "Repeated communication through the 'and' mechanism", avec Nicolas Vieille, *International Journal of Game Theory*, 2001, **30** : 41-61.
– "Informational cascades elicit private information", avec Nicolas Melissas, Discussion Paper in Economics 03/6, University of Leicester, à paraître dans *International Economic Review*.

1.1.6 Applications

Conjointement avec Pierre Picard, nous avons étudié l'impact de l'adaptation des comportements routiers aux mesures de sécurité routière sur le bilan coût-bénéfices de ces mesures.

- "On the consequences of behavioural adaptations in the cost-benefits analysis of road safety measures", avec Pierre Picard, Cahier du THEMA 2000/30, 2000, à paraître dans *Journal of Risk and Insurance.*

Chapitre 2

Approche stratégique de l'économie de l'information

Traditionnellement, l'objet central d'étude de l'économie concerne les activités de production, de consommation et d'échanges de biens entre individus et structures. Cependant, une partie majeure de l'activité économique est centrée autour d'un bien dont la nature est très particulière : l'information. Les activités des médias d'information, d'éducation, de publicité, les activités comptables, les hiérarchies décisionnelles sont autant d'exemples de domaines dans lesquels l'objet central est cet élément immatériel[1].

Peut-on considérer l'information comme un bien comme un autre, et si oui quelles sont ses propriétés ? Quelles sont les incitations à produire de l'information (activités de recherche), peut-on parler d'un marché pour l'information, et d'une consommation d'information au même titre que pour les biens matériels ? Ces questions forment le cœur du domaine de l'économie de l'information, qui a connu ses développements majeurs à partir des années 1960.

Les difficultés principales rencontrées lors de l'analyse de l'information comme un bien économique sont celles de sa valeur, et de sa mesure.

La valeur de l'information est très liée aux incitations des agents à acquérir de l'information. Dès 1962, Arrow [Arr62] montre que la valeur privée à l'invention peut être inférieure à sa valeur publique, et que ceci peut conduire

[1]Voir à ce sujet Radner [Rad93], qui montre qu'à l'intérieur des entreprises, une part significative de la force de travail est spécialisée dans le traitement de l'information

à un sous investissement dans les activités d'innovation. Hirshleifer [Hir71] met en évidence des situations ou la valeur privée est positive tandis que la valeur sociale nulle, ce qui conduit à un sur-investissement. Hirshleifer montre aussi que la valeur privée peut être négative : il semble donc qu'il n'y ait aucune règle générale concernant la valeur de l'information.

2.1 Jeux à information incomplète

Afin de bien comprendre la logique des résultats de valeur positive ou négative de l'information, nous allons définir brièvement la notion de valeur de l'information.

Le modèle que nous utilisons pour traiter des questions de valeur de l'information est celui des jeux à information incomplète (parfois aussi appelés jeux bayésiens).

Un jeu à information incomplète fait intervenir deux composantes : une structure d'information, et une structure de paiements.

Une structure d'information décrit, pour chacun des agents, les différentes valeurs des états de connaissance de cet agent, donne une loi de probabilité sur ces états de valeur. Dans la terminologie de Harsanyi [Har68], ou de Mertens et Zamir [MZ85], les états informationnels d'un agent sont appelés *types* de cet agent. L'incertitude de chaque agent porte simultanément sur les état de la nature et sur les états informationnels des autres agents. Les états de la nature décrivent les éléments du monde sur lesquels les joueurs ont une incertitude et qui peuvent influencer leurs utilités ou paiements. Par exemple, pour un choix vestimentaire, il est important que l'état de la nature décrive le temps qu'il va faire dans la journée. Pour une décision d'achat d'une automobile, l'état de la nature décrit la qualité du bien en question (état d'usure des pièces, pannes passées et prochaines éventuelles). L'information sur les états de la nature est importante pour les agents car leurs paiements dépendent des ces état de la nature. Chaque joueur possède aussi de l'information sur les états informationnels des autres agents. Par exemple, un acheteur ayant peu de capacité d'expertise sur une voiture d'occasion peut cependant avoir une opinion sur la capacité d'expertise du vendeur, ainsi, l'acheteur peut-il savoir que le vendeur a une bonne information sur la qualité de la voiture, sans avoir lui-même d'information sur cette qualité.

Il pourrait sembler que la description des structures d'information est auto-référente, car les types d'un joueur doivent décrire de l'information sur les types des autres joueurs. Mertens et Zamir [MZ85] ont démontré l'existence d'un modèle mathématique rigoureux et suffisamment riche pour que le type d'un joueur comprenne à la fois son information sur les états de la nature, l'information des autres joueurs sur l'information de chaque joueur sur les états de la nature, et ainsi de suite ...

La structure de paiements décrit les espaces de choix des agents, ainsi que, pour chaque valeur de l'état de la nature et des choix des agents, les utilités (ou paiements) obtenus par chacun des agents.

Ainsi, chaque paire consistant en une structure d'information et une structure de paiements décrit un jeu dans lequel l'information provient de la structure d'information, et les choix stratégiques et leurs conséquences en paiements sont décrits par la structure de paiements.

2.2 Approche de la valeur de l'information

L'avantage du formalisme des jeux à information incomplète est qu'il permet de faire varier séparément la structure d'information et la structure de paiements. Ainsi peut-on analyser l'impact de modifications de la structure d'information sur les issues des jeux à information incomplète. Les issues pour un joueur lui sont-elles plus favorables lorsque ce joueur a une meilleure information sur l'état de la nature ou sur les types des autres joueurs, ou bien au contraire cette meilleure information a-t-elle un effet néfaste pour lui ? Ces questions reviennent à étudier la valeur *privée* de l'information *privée*. On peut aussi se demander si les issues sont plus favorables ou défavorables à l'ensemble des joueurs lorsqu'un joueur en particulier est mieux informé. Dans ce cas, nous parlons de valeur *publique* de l'information *privée*. Nous pouvons enfin étudier les effets d'une meilleure information de l'ensemble des joueurs (information publique) sur les issues du jeu. Ceci nous conduit aux notions de valeurs *privées* ou *publiques* de l'information *publique*.

2.3 Exemple de valeur publique négative de l'information privée

Nous reprenons ici un exemple proposé par Kamien, Tauman, et Zamir [KTZ90] de valeur publique négative d'une information privée, dans sa variation proposée par Bassan et *alii* [BGSZ03].

Un arbitre tire une pièce de monnaie à pile ou face. Les états de la nature sont donc { Pile, Face }. Deux joueurs, le joueur 1 et le joueur 2, tentent l'un après l'autre de deviner l'état de la nature. Le joueur 1 fait donc une annonce, soit Pile, soit Face, puis le joueur 2, après avoir pris connaissance de l'annonce du joueur 1, fait lui aussi une annonce (Pile ou Face). Si un joueur est le seul à annoncer correctement le tirage de la pièce de monnaie, il obtient un paiement de 6 €. Si les deux joueurs font la bonne annonce, ils obtiennent 2 € chacun. Enfin, tout joueur faisant une annonce incorrecte obtient 0 €.

Supposons qu'au début du jeu, aucun joueur n'ait d'information sur le tirage de la pièce de monnaie. Dans ce cas, le joueur 1 a une chance sur deux de faire la bonne annonce. Sachant cela, le joueur 2 a le choix entre avoir une chance sur deux de gagner 6 € en faisant la même annonce que le joueur 1, et une chance sur deux de gagner 2 en faisant une annonce différente. Le joueur 2 choisit donc d'annoncer le contraire du joueur 1, et chaque joueur obtient en moyenne un paiement de 3 €.

Dans le cas où le joueur 1 est informé du tirage de la pièce de monnaie, le joueur 1 préfère annoncer le résultat correct (et gagner soit 6 € , soit 2 €) que de se tromper volontairement et gagner 0 € à coup sûr. Par conséquent, le joueur 1 annonce le bon résultat du tirage. Sachant ceci, et connaissant l'annonce du joueur 1, le joueur 2 préfère annoncer la même chose que le joueur 1. Par conséquent, les deux joueurs font toujours la bonne annonce, et chaque joueur obtient 2 €.

Dans le deuxième cas de figure, l'information du joueur 1 est meilleure que dans le premier cas de figure. Cependant, cette situation le conduit à obtenir un moins bon paiement. Remarquons que dans le deuxième cas, même si le joueur 2 ne connaît pas le résultat de la pièce de monnaie, il sait que le joueur 1 est informé du résultat. Le comportement du joueur 2 est donc différent dans les deux scenarios, ce qui conduit le joueur 1 a un moins bon paiement dans le deuxième cas. Le deuxième cas est aussi plus défavorable au joueur 2 que le premier, nous somme donc dans une situation de valeur publique négative de l'information privée du joueur 1.

2.4 Valeur de l'information à un agent

Le résultat central de la valeur de l'information à un agent est du à Blackwell [Bla51], [Bla53]. Ce résultat montre que plus d'information est toujours bénéfique dans les jeux à un joueur. Il montre aussi que, pour qu'une structure d'information soit plus bénéfique qu'une autre dans tous les jeux à un joueur, il faut que cette structure soit plus informative que l'autre. Blackwell établit donc une équivalence entre structure d'information plus informative et structure d'information meilleure en paiements dans les jeux à un joueur.

2.4.1 Description de l'information

On fixe un ensemble K fini d'états de la nature.

Une structure d'information μ est donnée par un ensemble de signaux X, et par une loi de probabilités μ sur $K \times X$.

L'interprétation est la suivante : une paire (k, x) est tirée aléatoirement selon la loi μ. Le joueur est informé du signal x, et pas de l'état de la nature k.

Par exemple, K peut consister en le temps qu'il fera demain, et x en un signal reçu sur ce temps, comme la météo lue dans un journal donné.

2.4.2 Comparaison en information

Si un joueur, au lieu de recevoir un signal x, reçoit un signal y, pouvant dépendre de x mais ne dépendant de k qu'à travers x, alors nous pouvons considérer que son information est moins bonne que s'il avait reçu x. En effet, y correspond à un signal "bruité" à partir de x, donc moins informatif que x. Cette idée de signal moins informatif qu'un autre peut se formaliser de la manière suivante.

Considère deux structures d'information, $\mu \in \Delta(X \times K)$, et $\nu \in \Delta(Y \times K)$.

Soit $T : X \times \Delta(Y)$ une probabilité de transition de X vers Y. μ et T

induisent une loi que nous notons $\mu \otimes T$ sur $X \times Y \times K$. Cette loi est donnée par les relations $\mu \otimes T(x, y, k) = \mu(x, k) \times T(x, y)$. Soit $T\mu$ la marginale sur $Y \times K$. $T\mu$ est obtenue par les relations

$$T\mu(y, k) = \sum_x T \otimes \mu(x, y, k) = \sum_x \mu(x, k) \times T(x, y)$$

$T(x)(y)$ représente la probabilité que le signal bruité prenne la valeur y si le signal original est x. Par conséquent, $T\mu(y, k)$ est la probabilité que le signal bruité soit y et que l'état de la nature soit k.

$T\mu$ est moins informative que μ car dans μ, le joueur reçoit le signal x, tandis que dans $T\mu$ il reçoit le signal bruité y.

Si le signal dans ν correspond à un bruitage de celui de μ, c'est-à-dire, s'il existe T tel que $T\mu = \nu$, on notera $\mu \geq_I \nu$. Cette relation se lit "μ est plus informative que ν".

2.4.3 Comparaison en paiements

Une structure de paiements à un joueur est appelée *problème de décision* selon la terminologie des statistiques. Un problème de décision $d = (A, g)$ est donné par un ensemble fini A de choix, et par une application $g: A \times K \to \mathbb{R}$.

Lorsque le joueur est informé d'un signal x, il peut prendre une décision en fonction de la valeur prise par son signal. Son comportement est décrit par une règle de décision dans d pour la structure d'information $\mu \in \Delta(X \times K)$, qui est une application $f_X: X \times A$.

Si le joueur utilise la règle de décision f_X, son paiement espéré vaut

$$\pi(f_X, g) = \sum_{x,k} \mu(x, k) g(f_X(x), k)$$

Le joueur peut choisir la règle de décision qui maximise son paiement espéré, et le paiement maximal correspondant est :

$$V(\mu, d) = \max_{f_X} \pi(f_X(x), g)$$

Ce paiement $V(\mu, d)$ dépend à la fois du problème de décision d, et de la structure d'information μ.

On dira que la structure d'information μ est meilleure que ν lorsque pour tout d, $V(\mu, d) \geq V(\nu, d)$. On note alors $\mu \geq_d \nu$.

Dans ce dernier cas, il vaut toujours mieux être informé selon μ que selon ν. En effet, dans chaque problème de décision, il existe une règle de décision lorsque l'information provient de μ qui permet d'obtenir un meilleur paiement que toutes les règles de décision lorsque l'information provient de ν.

Selon le résultat de Blackwell [Bla51], [Bla53] de comparaison de structures d'information : toute structure meilleure en paiements qu'une autre est meilleure en information, et réciproquement.

2.4.4 Plus d'information implique de meilleurs paiements

Nous montrons ici qu'une meilleure information implique toujours de meilleurs paiements, et que par conséquent l'information à toujours une valeur positive dans les jeux à un joueur.

Supposons donc $\mu \geq_I \nu$, et nous allons montrer $\mu \geq_d \nu$.

On définit une règle de décision mixte $\tilde{f}_X$ comme une application de X vers $\Delta(A)$. Une règle de décision mixte permet donc le tirage aléatoire d'un choix a en fonction d'un signal x. La probabilité de choisir a lorsque x est le signal reçu vaut $\tilde{f}_X(x)(a)$. On définit le paiement espéré de la règle de décision mixte $\tilde{f}_X$ dans le problème de décision d comme étant :

$$\pi(\tilde{f}_X, d) = \sum_{k,x,a} \mu(x, k)\tilde{f}_X(x)(a)g(a, k)$$

Soit f_Y une règle de décision avec espace de signaux Y. Considérons la règle de décision $\tilde{f}_X$ qui consiste dans un premier lieu à choisir un signal y aléatoirement selon $T(x)$, puis à jouer $f_Y(y)$. La règle $\tilde{f}_X$ revient donc à reproduire un signal y, puis à jouer comme si ce signal provenait de ν. Par conséquent, le paiement espéré est le même dans les deux cas :

$$\pi(\tilde{f}_X, d) = \pi(f_Y, d)$$

D'après le théorème de Kuhn d'équivalence entre stratégies mixtes et de comportement, une règle de décision mixte peut être vue comme un choix aléatoire d'une règle de décision. Par conséquent, le paiement de la règle de décision mixte $\tilde{f}_X$ est une moyenne de paiements de règles de décision. En particulier,

$$\pi(\tilde{f}_X, d) \leq V(\mu, d)$$

Nous pouvons conclure que

$$V(\mu, d) \geq \pi(f_Y, d)$$

et comme l'inégalité précédente est valide pour tous f_Y :

$$V(\mu, d) \geq V(\nu, d)$$

2.4.5 Plus d' information est nécessaire pour de meilleurs paiements

Nous montrons ici que pour qu'une structure d'information soit meilleure en paiements qu'une autre, il est nécessaire qu'elle soit plus informative. Considérons donc μ, ν telles que $\mu \geq_d \nu$, et nous allons montrer que $\mu \geq_I \nu$.

L'approche que nous suivons ici est celle de Blackwell [Bla53], qui consiste à construire un jeu à somme nulle dans lequel un joueur choisit un problème de décision, et l'autre choisit une règle de décision, puis à appliquer le théorème de min max de von-Neumann et Morgenstern [vNM44]. Pour une preuve alternative voir Crémer [Cré82].

Soit D l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels $A = Y$, et $g(y, k) \in [0, 1]$. Comme $\mu \geq_d \nu$, pour tout $g \in D$, il existe f_X qui donne un meilleur paiement que la règle Id_y qui consiste à jouer y lorsque le signal est y, c'est-à-dire :

$$\pi(f_X, g) \geq \pi(Id_Y, g)$$

Soit C l'ensemble des règles de décision f_μ, et $\tilde{C}$ l'ensemble des lois de probabilité sur C, dont nous avons vu qu'elles pouvaient d'après le théorème de Kuhn s'identifier aux règles de décision mixtes.

Soit G le jeu dans lequel :

- Le joueur 1 choisit $\tilde{f}_\mu$ dans $\tilde{C}$,
- le joueur 2 choisit $g \in D$,
- le paiement du joueur 1 est $\pi(f_\mu, g) - \pi(Id_Y, g)$

Le paiement est linéaire en les stratégies de 1, et de 2. De plus, pour toute stratégie g du joueur 2, il existe une stratégie f_μ (dans C) du joueur 1 qui défend un paiement de 0 face à g. D'après le théorème du min max, il existe une stratégie $\tilde{f}_X$ de 1 (dans $\tilde{C}$) qui défend 0. C'est à dire, pour tout $g \in D$,

$$\pi(\tilde{f}_X, g) \geq \pi(Id_Y, g)$$

Voyons $\tilde{f}_X$ comme une stratégie de comportement, i.e. comme une application de X vers $\Delta(Y)$. Pour toute fonction g dans D, on a :

$$\sum_{k,x} \mu(x,k) \sum_{y} \tilde{f}_X(x)(y) g(y,k) \geq \sum_{k,y} \nu(y,k) g(y,k)$$

Pour (k_0, y_0) fixés, en particularisant la relation précédente au cas $g(y,k) = 1$ si $(y,k) = (y_0, k_0)$ et 0 sinon, on obtient :

$$\sum_{x} \mu(x, k_0) \tilde{f}_\mu(x)(y_0) \geq \nu(y, k_0)$$

Cad. en considérant la probabilité de transition $T(x)(y) = \tilde{f}_X(x)(y)$:

$$(T\mu)(x, k_0) \geq \nu(y, k_0)$$

Comme la somme sur toutes les paires (y_0, k_0) des membres de gauche et des membres de droite sont égales, on conclut que pour tout y, k,

$$(T\mu)(y,k) = \nu(y,k)$$

et par conséquent

$$\tilde{T}\mu = \nu$$

Nous avons bien montré que μ est plus informative que ν.

2.4.6 Valeur positive de l'information secrète

Le fait que plus d'information soit toujours bénéfique dans les jeux à un joueur nous éclaire sur les causes des phénomènes de valeur négative de l'information. Comme nous l'avons vu dans l'exemple de la section 2.3, lorsque nous comparons deux structures d'information, un joueur j ayant une meilleure information dans la première que dans la seconde, nous supposons que tous les autres joueurs savent que l'information du joueur j est meilleure dans le premier cas que dans le second. Ceci est du au fait que les structures d'information forment un modèle clos, et que tous les joueurs ont connaissance commune de la structure d'information.

Ce concept de comparaison de l'information privée diffère d'une variante, appelée information secrète, dans laquelle un joueur j peut avoir une meilleure information ou ne pas l'avoir, sans que les autres joueurs soient au courant. Dans ce dernier cas, le comportement des autres joueurs que j est le même, que le joueur j ait une meilleure information ou non. Une conséquence de la valeur positive de l'information à un agent est que plus d'information secrète est toujours bénéfique, comme le montre Neyman [Ney91].

2.5 Information et stratégies

Une approche des questions de la valeur de l'information consiste à analyser les effets stratégiques d'un supplément d'information pour un joueur dans un jeu étendu donné par une structure d'information et par une structure de paiements.

Dans ce jeu étendu, une stratégie pour le joueur j est une application de l'ensemble des types du joueur j vers son ensemble d'actions. A chaque profil de stratégies correspond un paiement espéré pour chacun des joueurs dans le jeu étendu. Le jeu étendu est donc vu comme un jeu sous forme normale dans lequel chaque joueur choisit une stratégie, et où tout profil de stratégies définit un paiement espéré pour chaque joueur.

Si on affine l'information d'un joueur, son espace de stratégies se trouve augmenté, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1 *L'ensemble des états de la nature est celui des tirages aléatoires d'une pièce de monnaie, Pile ou Face.*

Dans la structure d'information $\mathfrak{E}$, aucun joueur n'a d'information sur le résultat du tirage de la pièce de monnaie.

Dans $\mathfrak{E}'$, le joueur 1 ne connaît pas le résultat du tirage de la pièce de monnaie, mais le joueur 2 est informé.

Donc, $\mathfrak{E}'$ est plus informative pour le joueur 2 que $\mathfrak{E}$.

La structure de paiements est la suivante : chaque joueur a deux action possibles qui sont $\{H, B\}$ pour le joueur 1 et $\{G, D\}$ pour le joueur 2. Dans les états de la nature Pile et Face, les paiements des joueurs 1 et 2 en fonction de leurs choix sont donnés par les tableaux :

	G	D
H	$0,0$	$1,2$
B	$2,0$	$0,2$

Pile

	G	D
H	$0,1$	$1,0$
B	$2,1$	$0,0$

Face

Dans le jeu étendu dans lequel la structure d'information est $\mathfrak{E}$, chaque joueur n'a qu'un état informationnel. Le joueur 1 a deux stratégies possibles, qui sont H et B, tandis que le joueur 2 a deux stratégies possibles qui sont G et D.

Le jeu étendu est représenté par le tableau suivant qui relie les choix de stratégies avec les paiements espérés :

	G	D
H	$0,\frac{1}{2}$	$1,1$
B	$2,\frac{1}{2}$	$0,1$

Dans le jeu étendu dans lequel la structure d'information est $\mathfrak{E}'$, le joueur 1 a un seul type informationnel, et ses stratégies sont Pile, Face. Le joueur 2 a maintenant 2 états informationnels, le premier dans lequel il sait que l'état de la nature est Pile, et le second dans lequel il sait que l'état de la nature est Face. Le joueur 2 possède 4 stratégies qui sont :

- *GG : jouer G dans les deux états de la nature ;*
- *GD : jouer G dans l'état Pile, D dans l'état Face ;*
- *DG : jouer D dans l'état Pile, G dans l'état Face ;*
- *DD : jouer D dans les deux états de la nature.*

Le tableau qui relie stratégies et paiements est maintenant :

	GG	GD	DG	DD
H	$0,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2},0$	$\frac{1}{2},\frac{3}{2}$	$1,1$
B	$2,\frac{1}{2}$	$1,0$	$1,\frac{1}{2}$	$0,1$

Les stratégies du joueur 1 sont les mêmes dans les deux structures d'information. Le joueur 2 possède plus de stratégies avec la structure plus informative $\mathfrak{E}'$ qu'avec la structure moins informative $\mathfrak{E}$. Les stratégies du joueur 2 avec $\mathfrak{E}$ peuvent être vues comme un sous ensemble des stratégies avec $\mathfrak{E}'$ (G devient GG, D devient DD).

La logique qui veut que plus d'information induise plus de stratégies dans les jeux étendus s'étend de l'exemple précédent à l'ensemble des jeux à information incomplète. En effet, plus un joueur a d'information, plus il est capable de faire dépendre ses choix dans le jeu de l'état de la nature et des états d'information des autres joueurs. En particulier, lorsqu'un joueur possède plus d'information, il lui est toujours possible d'ignorer cette information et de jouer comme s'il avait reçu moins d'information.

2.5.1 Peut-on toujours expliquer plus de stratégies par plus d'information ?

Nous avons donc vu que plus d'information implique plus de stratégies dans le jeu étendu correspondant. Une question qu'il est donc naturel de se poser est : *Étant donnés deux jeux qui ne diffèrent que par le fait que le joueur j a plus de stratégies dans l'un que dans l'autre, existe-t-il deux structures d'informations et une structure de paiement tels que :*

- *Les deux jeux étendus correspondant aux deux structures d'information coincident avec les deux jeux de départ ;*
- *les deux structures d'information ne diffèrent que par le fait que le joueur j a plus d'information dans un cas que dans l'autre ?*

Un tel résultat permettrait de montrer l'équivalence formelle entre plus d'information pour un joueur et plus de stratégies pour ce même joueur , et permettrait d'appréhender la question de la valeur de l'information par celle de la valeur d'un plus grand ensemble de stratégies.

2.5.2 États de la nature finis ou dénombrables

Si l'ensemble des états de la nature K est fini ou dénombrable, il n'est pas en général possible de construire des structures d'information et une structure de paiements ayant les propriétés souhaitées. Dans l'article [Gos04], je propose le contre exemple suivant.

Exemple 2 *Soient G et G' les jeux à un joueur suivants :*

$$\begin{array}{c|c|}\cline{2-2} B & 0 \\ \cline{2-2} \multicolumn{2}{c}{G} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c|}\cline{2-2} H & 1 \\ \cline{2-2} B & 0 \\ \cline{2-2} \multicolumn{2}{c}{G'} \end{array}$$

Dans le jeu G, le joueur ne peut que jouer B et obtenir 0, tandis que dans le jeu G', il a le choix entre jouer H et obtenir 1, et B pour un paiement de 0. Le joueur 1 a donc bien plus de stratégies dans G' que dans G.

Cependant, si K est un ensemble d'états de la nature fini ou dénombrable, il n'existe pas de structures d'information $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ et de structure de paiement telles que :
- *Le jeu associé à $\mathfrak{E}$ et la structure de paiement est G ;*
- *Le jeu associé à $\mathfrak{E}'$ et la structure de paiement est G' ;*
- *Le joueur est mieux informé dans $\mathfrak{E}'$ que dans $\mathfrak{E}$.*

Pour la démonstration de ce résultat, voir [Gos04].

Il n'est donc pas toujours possible d'expliquer plus de stratégies par une meilleure information avec un ensemble d'états de la nature fini ou dénombrable.

2.5.3 Possible avec K continu : exemple

Nous allons montrer comment, en utilisant comme ensemble K l'intervalle $[0, 1]$, il est possible de construire $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, et une structure de paiements qui ont les propriétés souhaitées pour les deux jeux G et G' de l'exemple précédent.

Exemple 3 *Considérons les jeux G et G' de l'exemple précédent. Soit $K = [0, 1]$. L'état de la nature k est tiré uniformément dans K.*

Dans la structure d'information $\mathfrak{E}$, le joueur n'est pas informé de k (il ne reçoit aucune information sur la valeur prise par k). Dans la structure d'information $\mathfrak{E}'$, le joueur est informé de la valeur prise par k. Les structures d'information vérifient bien que le joueur est mieux informé dans $\mathfrak{E}'$ que dans $\mathfrak{E}$.

La structure de paiement est la suivante : Le joueur annonce un nombre c dans $[0, 1]$. Si l'annonce correspond à la vraie valeur de k ($c = k$), le joueur obtient un paiement de 1. Dans le cas contraire ($c \neq k$), il obtient un paiement de 0.

Dans le jeu avec structure d'information $\mathfrak{E}$, les seules stratégies du joueur sont d'annoncer une valeur c indépendamment de la valeur de k. La probabilité que $c = k$ étant nulle, le paiement espéré du joueur est 0. Toute stratégie *donne donc un paiement espéré nul, ce qui montre que le jeu considéré est bien (équivalent à) G.*

Dans le jeu avec structure d'information $\mathfrak{E}'$, le joueur peut annoncer une valeur c en fonction de la valeur de k. Il a donc la possibilité d'annoncer toujours $c = k$, ce qui lui donne un paiement de 1*, d'annoncer une valeur de c toujours différente de k, ce qui donne un paiement de* 0*, ou bien d'annoncer parfois la vraie valeur de k, et parfois non, ce qui donne un paiement compris entre 0 et 1. Le jeu auquel le joueur fait face est donc bien équivalent à G', dans lequel il peut obtenir un paiement de 1 en jouant H, de* 0 *en jouant B, et compris entre* 0 *et* 1 *en jouant une stratégie aléatoire entre H et B.*

L'exemple précédent correspond à une expérience courante pour tous ceux qui se trouvent conduits à ouvrir des portes cochères munies d'un code d'accès. La connaissance du code permet l'ouverture de la porte. On peut dans ce cas considérer qu'il y a un équivalence entre une connaissance, celle du code, et une possibilité physique réalisable ou non, l'ouverture de la porte.

2.5.4 Résultat général

La construction de structures d'information et d'une structure de paiements de l'exemple précédent se généralise à n'importe quels jeux dans lequel les joueurs ont un nombre fini de stratégies. J'ai montré dans l'article [Gos04] que, si G et G' sont deux jeux à nombre quelconque de joueurs et à nombre fini de stratégies par joueurs, et qui ne diffèrent que par le fait que le joueur j a plus de stratégies dans G' que dans G, il existe deux structures d'information $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$, et une structure de paiements tels que :

- Le jeu associé à $\mathfrak{E}$ et la structure de paiement est G ;
- Le jeu associé à $\mathfrak{E}'$ et la structure de paiement est G' ;
- $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ ne diffèrent que par le fait que j est mieux informé dans $\mathfrak{E}'$ que dans $\mathfrak{E}$.

2.5.5 Exemple de valeur négative de l'information

Le résultat précédent, qui lie l'information aux espaces de stratégies, permet de construire des exemples de valeur négative de l'information, tels que le suivant.

Exemple 4 *Considérons les jeux G and G' à deux joueurs dont les matrices de paiements sont :*

	G
H	$3,3$
B	$2,0$

G

	G	D
H	$3,3$	$0,4$
B	$2,0$	$1,1$

G'

Les deux jeux ne diffèrent que par le fait que dans le jeu G', le joueur 2 possède plus de stratégies que dans le jeu G. Le jeu G' attribue donc des paiements à des stratégies n'existant pas dans G. D'après le résultat précédent, on peut construire deux structures d'information $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ qui ne diffèrent que par le fait que le joueur 2 est mieux informé dans $\mathfrak{E}'$ que dans $\mathfrak{E}$, et une structure de paiements telles que le jeu associé à $\mathfrak{E}$ est G, et celui associé à $\mathfrak{E}'$ est G'.

Dans le jeu G, le joueur 1 préfère jouer H et obtenir 3 plutôt que B et obtenir 2. Le paiement résultant est de 3 pour chacun des joueurs.

Dans le jeu G', le joueur 2 préfère jouer D à G, indépendamment du choix de 1. Le joueur 1 peut donc anticiper que le joueur 2 choisit D, et dans ce cas il préférera jouer B pour un paiement de 1 plutôt que H pour un paiement de 0. Les paiements résultant des choix d'actions D, B sont de 1 pour chacun des joueurs.

La situation où le joueur 2 possède plus de stratégies (ou de manière équivalente plus d'information) est plus désavantageuse pour les deux joueurs que celle où le joueur 2 possède moins de stratégies (ou d'information).

Remarquons que dans la logique du jeu G', il est important que le joueur 1 connaisse les possibilités stratégiques du joueur 2, en particulier qu'il sache que le joueur 1 a la possibilité de jouer D. C'est ce qui le conduit à choisir B plutôt que H. L'hypothèse que le joueur 1 sait que le joueur 2 est mieux informé revient à supposer que le joueur 1 connaît les stratégies possibles de 2. Dans le cas contraire où les stratégies seraient accessibles au joueur 2 sans que le joueur 1 le sache (on pourrait dans ce cas parler de stratégies secrètes), il serait toujours mieux pour le joueur 2 d'avoir plus de stratégies que moins de stratégies, de même que dans Neyman [Ney91], l'information secrète bénéficie toujours à celui qui la reçoit.

2.5.6 Typologie de la valeur de l'information

Une conséquence de l'analyse de l'information en termes de stratégies est que l'information a une valeur (privée ou sociale) positive dans les cas ou plus de stratégies ont une valeur positive. Dans le cas contraire, on le résultat précédent permet de construire des exemples de valeur négative de l'information.

A un seul joueur, plus de stratégies est toujours bénéfique. En effet, nous sommes ici dans le cadre d'un joueur choisissant parmi l'ensemble des stratégies possibles celle lui donnant le meilleur paiement possible, donc plus de choix augmente ce meilleur paiement. Nous retrouvons le cadre de Blackwell à un joueur et sa valeur positive de l'information.

Les jeux à somme nulle décrivent des situations dans lesquelles deux joueur ont des intérêts absolument opposés. Dans ces jeux, une conséquence du théorème du $\min\max$ est que plus de stratégies pour un joueur est bénéfique pour ce joueur, et donc maléfique pour l'autre joueur. Nous retrouverons ce résultat dans la section 2.6, ou nous verrons que plus d'information est toujours bénéfique pour le joueur qui la reçoit dans les jeux à somme nulle.

Dans les jeux à intérêts communs, tels que définis par Aumann et Sorin [AS89], il existe une issue du jeu qui est réalisable et préférable à toutes les autres pour tous les joueurs. Cette issue du jeu apparaît donc comme un objectif commun à tous les joueurs. Dans cette classe de jeux, avoir moins de stratégies ne peut que gêner la réalisation de cet objectif, et ne peut donc avoir d'effet positif sur les issues du jeu. Nous reviendrons sur cette classe de jeux dans la section 2.7 en montrant que les effets de valeur négative de l'information peuvent se produire dès qu'un jeu n'est pas à buts communs, mais jamais dans les jeux à buts communs.

2.6 Information et antagonisme

Un jeu à somme nulle s'appelle ainsi car la somme des gains des deux joueurs est nulle. Ces jeux décrivent donc des situations parfaitement antagonistes.

Les jeux à somme nulle furent la première classe de jeux à être étudiée en détail par Borel [Bor21] puis par von Neumann [vN28]. La théorie des jeux à somme nulle fut développée par, von-Neumann et Morgenstern [vNM44], qui l'utilisèrent ensuite comme fondement de l'étude des jeux généraux. Et en effet, la théorie des jeux à somme nulle rencontre de nombreuses applications dans les jeux à somme non nulle, comme la caractérisation des niveaux de rationalité individuelle pour les jeux répétés, ou l'existence de paiements d'équilibres dans les jeux stochastiques, ou les niveaux de désaccords dans la théorie des jeux coopératifs. On peut ici citer Borel [Bor14], p. 218 : "Mais la société n'est-elle pas organisée de telle manière que, dans certaines circonstances, le malheur des uns soit indirectement profitable à d'autres" ?

Le résultat central des jeux à somme nulle, du à von-Neumann [vN28], est l'existence d'une valeur dans ce type de jeux, et de stratégies optimales pour les joueurs (sous des hypothèses topologiques sur les espaces d'actions et la fonction de paiement).

Une stratégie optimale pour le joueur 1 est une stratégie qui lui garantit d'obtenir la valeur du jeu face à toute stratégie du joueur 2. De même, une stratégie optimale du joueur 2 garantit qu'aucune stratégie du joueur 1 ne peut lui permettre d'obtenir plus que la valeur. La valeur décrit donc ce que le joueur 1 serait prêt à payer pour jouer le jeu à somme nulle, et ce qu'il faudrait payer en contrepartie au joueur 2 pour qu'il accepte d'entrer dans le jeu. La valeur s'écrit comme le maximum sur l'ensemble des stratégies de 1 du mimimum sur l'ensemble des stratégies de 2 du paiement correspondant pour 1, d'où le nom de théorème de $\min\max$. C'est aussi le mimimum sur l'ensemble des stratégies de 2 du maximum sur l'ensemble des stratégies de 1 du paiement correspondant pour 1 ($\min\max = \max\min$).

Une conséquence du théorème du $\min\max$ est que la valeur est croissante avec l'ensemble des stratégies du joueur 1, et décroissante avec l'ensemble des stratégies du joueur 2. En effet, si l'on augmente l'ensemble de stratégies de 1, le max est pris sur un espace plus grand, et si l'on diminue l'ensemble de stratégies de 2, le min est pris sur un ensemble plus petit, d'où une augmentation de la valeur.

Par conséquent, dans tous les jeux à information incomplète, augmenter l'information de 1, ou diminuer celle de 2, résulte en une augmentation de la valeur du jeu. L'information de 1 a donc une valeur positive pour ce joueur, et négative pour le joueur 2. De même pour l'information du joueur 2.

L'information ayant une valeur positive dans les jeux à somme nulle, on peut se demander s'il existe une généralisation des résultats de Blackwell pour un joueur à ce cadre. La présentation suivante expose certains des résultats obtenus en collaboration avec Jean-François Mertens [GM01].

Une question que le cadre des jeux à information incomplète à somme nulle nous a conduits à étudier est celle de l'information stratégiquement importante par rapport à celle qu'il est possible d'ignorer.

Dans les jeux à un joueur, l'information stratégiquement importante est toute celle qui porte sur les états de la nature. Des signaux n'apportant rien comme information sur les états de la nature peuvent être considérés comme inutiles et ignorés sans coût aucun. Par exemple, un téléspectateur s'informant de la météo dans un journal télévisé recevra d'autres informations en même temps que les prévisions météo (accoutrement vestimentaire du présentateur, annonces publicitaires par exemple). Ces signaux supplémentaires ne lui apprenant rien sur la météo peuvent être oubliés.

Dans le cas des jeux à somme nulle comme dans les jeux à un joueur, l'information de chaque joueur sur les états de la nature est stratégiquement importante. Mais à la différence des jeux à un joueur, dans un jeu à somme nulle chaque joueur cherche à anticiper les choix de l'autre. Comme ces choix dépendent de l'information de cet autre joueur sur les états de la nature, toute l'information d'un joueur sur l'information de l'autre sur l'état de la nature est elle aussi stratégiquement importante. A son tour, toute information sur l'information de l'autre sur sa propre information sur l'état de la nature est stratégiquement importante, et ainsi de suite.

Nous voyons donc que dans les jeux à somme nulle, l'information qui est stratégiquement importante ne constitue pas seulement en l'information sur l'état de la nature, mais en toute information pouvant être décrite comme information sur l'information de l'autre joueur sur l'information ... sur l'état de la nature. On dit que toutes les hiérarchies de croyances sur l'état de la nature sont importantes. Il reste à savoir si une information qui ne porterait pas sur un degré de croyances d'un joueur sur l'état de la nature peut-être stratégiquement importante.

Exemple 5 *Les états de la nature sont A, ou B. Les deux joueurs connaissent l'état de la nature. Dans l'état de la nature B, les deux joueurs observent le tirage d'une pièce de monnaie qui n'influe pas les paiements.*

Chaque joueur peut oublier le cas échéant la valeur du tirage de la pièce de monnaie. En effet, si le joueur 1 n'utilise pas cette information, elle n'a aucune valeur pour le joueur 2 car elle ne lui apprend rien, ni sur les états de la nature, ni sur les choix du joueur 2. De même si le joueur 2 ignore *cette information, elle n'a aucune valeur pour 1.*

La valeur de l'information étant positive dans les jeux à somme nulle, la situation où seul le joueur 1 ignore la pièce de monnaie est moins favorable pour lui que celle où les deux connaissent le résultat de la pièce de monnaie, lequel cas est moins favorable que celui dans lequel le joueur 2 seul ignore la pièce de monnaie, lequel cas est moins favorable pour 1 que si 2 ignore. Or si seul le joueur 1 ou seul le joueur 2 ignore cette information, nous avons vu que la valeur est la même que dans le cas où les deux l'ignorent. Par conséquent, la valeur du jeu est la même lorsque les deux joueurs, un seul ou aucun ignorent le tirage de la pièce de monnaie.

L'information sur la pièce de monnaie, qui n'est de l'information à aucun degré sur l'état de la nature, peut donc être ignorée par chacun des joueurs sans perte. Elle n'est pas stratégiquement importante.

Lorsqu'à partir d'une structure d'information quelconque, on construit une structure d'information représentant l'information des agents sur l'état de la nature, leur information sur l'information des autres sur l'état de la nature, et ainsi de suite, on dit que l'on construit la structure d'information canonique associée (voir Mertens et Zamir [MZ85]). Dans la structure d'information canonique associée à la structure d'information de l'exemple 5, chaque joueur est uniquement informé de l'état de la nature (l'information sur le résultat de la pièce de monnaie est oublié).

La relation qui associe une structure d'information à sa structure d'information canonique fait intervenir l'information seulement, elle ne fait pas intervenir les structures de paiements. En généralisant à partir de l'exemple précédent, on montre que toute structure d'information donne la même valeur que sa structure canonique associée pour toute structure de paiements.

Avec Jean-François Mertens [GM01], nous avons aussi montré que deux structures d'information donnant la même valeur pour toute structure de paiements sont associées à la même structure d'information canonique.

Par conséquent, nous avons donc montré l'égalité entre une relation entre structures d'information définie en termes informationnels (avoir la même structure d'information canonique), et une relation définie en termes stratégiques (induire la même valeur pour toutes les structures de paiements).

Ce résultat est reminiscent de celui de Blackwell à un joueur, montrant l'égalité entre la relation informationnelle (être plus informative que), et la relation en paiements (induire un meilleur paiement dans tous les jeux). Cependant, nous n'avons caractérisé que les classes d'équivalences, et non pas l'ordre induit par la valeur dans les jeux entre les structures d'information.

2.7 Information et buts communs

Les jeux à intérêts communs sont des jeux dans lesquels les joueurs préfèrent tous une issue du jeu aux autres issues réalisables (voir Aumann et Sorin [AS89]). L'article de Bassan et *alii* [BGSZ03] étudie la valeur de l'information dans cette classe de jeu, et montre que la condition d'intérêts communs des paiements est d'une certaine manière nécessaire et suffisante pour que l'information ait une valeur sociale positive.

Le fait qu'un jeu soit ou non à intérêts communs dépend de l'ensemble des paiements réalisables de ce jeu, et non de la manière particulière dont les choix d'actions sont reliés aux paiements.

Exemple 6 *Considérons les jeux suivants dans lesquels le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, et la case correspondante indique la paire de paiements des joueurs 1 et 2.*

	G	D
H	$0,0$	$1,2.5$
B	$3,3$	$3,3$

G_1

	G	D
H	$0,0$	$1,2.5$
B	$3,3$	$0,0$

G_2

Les jeux G_1 et G_2 sont très différents car dans G_1, le joueur 1 peut forcer les paiements $(3,3)$ en choisissant B, tandis que dans G_2 il est nécessaire que le joueur 2 joue G pour obtenir ce paiement. Cependant, G_1 et G_2 ont le même ensemble de paiements réalisables : $\{(0,0),(1,2.5),(3,3)\}$, représenté figure 2.1.

Ces jeux sont à intérêts communs car les deux joueurs préfèrent une issue du jeu donnant comme paiements $(3,3)$ à toute autre issue du jeu.

Considérons maintenant les jeux :

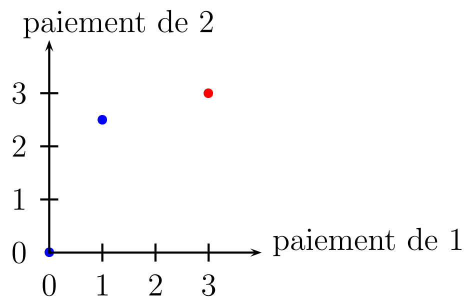

FIG. 2.1 – Paiements réalisables de jeux à intérêts communs

	G	D
H	$0,0$	$1,2$
B	$2,1$	$1,1$

G_4

	G	D
H	$2,1$	$1,2$
B	$0,0$	$1,1$

G_4

Ces jeux G_3 et G_4 ont en commun leur ensemble de paiements réalisables $\{(0,0),(1,2),(2,1),(1,1)\}$*, représenté figure 2.2.*

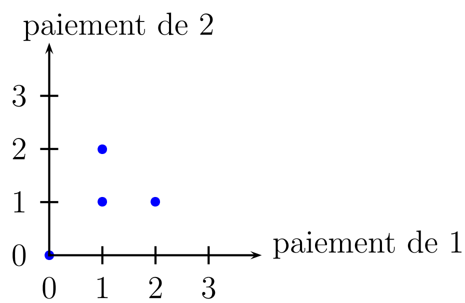

FIG. 2.2 – Paiements réalisables de jeux sans intérêts communs

Comme nous le voyons, G_3 et G_4 ne sont pas à intérêts communs, chaque joueur préférant un paiement de 2 alors que ces deux paiements sont incompatibles.

Considérons une paire (structure d'information, structure de paiements) telle que le jeu à information incomplète induit soit à intérêts communs. Considérons maintenant une possibilité de restreindre l'information de certains joueurs dans la structure d'information. Avec moins d'information, les joueurs ont moins de stratégies, donc moins de possibilités d'atteindre le but commun. De plus, tous les paiements qu'ils peuvent atteindre avec moins d'information pouvaient aussi être atteints dans la structure d'information d'origine. Par conséquent, les effets d'avoir limité l'information des joueurs ne peuvent qu'être négatifs dans le sens où atteindre le but commun ne peut que devenir plus difficile. La valeur sociale de l'information est donc positive pour les jeux à intérêts communs.

Nous sommes ici dans une généralisation de la logique de la valeur positive de l'information à un joueur. Lorsque les joueurs ont intérêt à réaliser le même but, ils se comportent comme une équipe, et limiter l'information de certains d'entre eux ne peut qu'avoir un impact négatif sur le groupe.

Pour comprendre que des intétêts communs sont dans une certaine mesure nécessaires pour que l'information ait une valeur positive, considérons l'exemple suivant.

Exemple 7 *Les deux joueurs, joueur 1 et joueur 2, peuvent décider de s'associer, ou de ne pas s'associer. A l'intérieur de l'association, le joueur 2 peut essayer de trahir le joueur 1. Pour que la trahison réussisse, il faut que le joueur 2 soit en possession d'une information secrète. Les paiements sont les suivants : si un des joueurs au moins refuse l'association, les paiements sont de 0 pour chaque joueur. Si les joueurs s'associent et que le joueur 2 ne trahit pas (ou ne réussit pas sa trahison par ce qu'il ne connaît pas l'information secrète), les paiements sont de 1 pour les deux joueurs. Si les deux joueurs s'associent et le joueur 2 ne trahit pas, les paiements sont de 1 pour chaque joueur. Les paiements sont représentés dans la matrice suivante, où AT signifier s'associer et trahir, ANT s'associer et ne pas trahir, NA ne pas s'associer, et A s'associer.*

	NA	AT	ANT
A	$0,0$	$-1,2$	$1,1$
NA	$0,0$	$0,0$	$0,0$

Jeu d'association avec trahison

L'ensemble des paiements réalisables de ce jeu est représenté figure 2.3.

Dans la logique de la section 2.5, il est possible de construire des structures d'information qui ne diffèrent entre elles que par le fait que le joueur 2 est

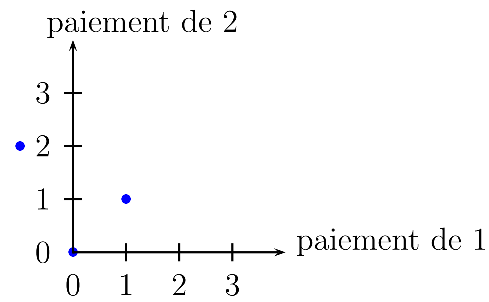

FIG. 2.3 – Paiements réalisables du jeu avec trahison

plus informé dans l'une que dans l'autre, et une structure de paiements, telles que lorsque le joueur 2 est plus informé, le jeu à information incomplète correspond au jeu ci dessus avec possibilité de trahison, tandis que lorsque le joueur 2 est moins informé, le jeu à information incomplète correspond au même jeu, mais dans lequel la stratégie de trahison AT a été rendue impossible.

Dans le cas où le joueur 2 est plus informé, si le joueur 1 accepte l'association, le joueur 2 préfère trahir. Par conséquent le joueur 1 n'accepte pas l'association, et les joueurs obtiennent un paiement de 0 chacun.

Dans le cas où le joueur 2 est moins informé, le jeu à information incomplète correspondant est :

	NA	ANT
A	$0,0$	$1,1$
NA	$0,0$	$0,0$

Jeu d'association sans trahison

Dans ce jeu, les joueurs ont interêt à entrer dans l'association, et aucun joueur n'a de déviation profitable. Le paiement résultant est de 1 pour chaque joueur.

Du moment que le joueur 2 a une possibilité d'augmenter son gain au détriment du joueur 1 en trahissant, le joueur 1 refuse l'association de peur de la trahison du joueur 2. Lorsque le joueur 2 est moins informé, les buts sont communs et l'association est réalisable et acceptable par les deux joueurs.

Le fait que le jeu où le joueur 2 est le plus informé ne soit pas à intérêts communs provient de la possibilité qu'a le joueur 2 de trahir pour obtenir un meilleur paiement. C'est ce qui rend l'association non souhaitable de la part *du joueur 1. Dans ce jeu sans intérêts communs entre les joueurs, mieux vaut pour tous les joueurs que le joueur 2 soit moins informé. Nous sommes dans une situation de valeur socialement négative de l'information privée.*

Une conclusion de cette étude est que les intérêts communs peuvent être nécessaires à la participation de tous les joueurs vers un même but, et que lorsque cette condition n'est pas réunie, certains des joueurs peuvent chercher à défendre leurs intétêts au détriment des autres, ce qui aboutit à des situations de valeur négative de l'information. En revanche, dans les situations à intérêts communs, plus d'information est toujours socialement bénéfique. Au moment de former une association, un groupe de partenaires a donc tout intérêt à définir clairement les buts de l'équipe, car laisser trop d'incertitude sur les buts à réaliser peut conduire à des comportements non-coopératifs de la part des membres de l'équipe.

2.8 L'information comme mécanisme social

Dans le cas des jeux à un joueur, une information ne vaut que parce qu'elle révèle sur un état de la nature. Nous avons vu section 2.6 que dans les jeux à somme nulle, l'information importante est celle qui porte sur un degré de croyances arbitraire sur l'état de la nature (information sur l'information de l'autre joueur sur l'information ... sur l'état de la nature).

Une information qui ne serait pas reliée à un état de la nature serait purement sociale : elle n'aurait de valeur pour un agent que par ce qu'elle en a pour les autre agents. Par exemple, observer le résultat d'une pièce de monnaie est important pour un joueur s'il croit que le comportement des autres joueurs peut être influencé par l'observation de la pièce de monnaie. Ce phénomène est étudié sous le nom de "taches solaires" dans les économies d'échange. Dans un autre domaine, des mécanismes tels que ceux des "feux rouges" sont purement sociaux, ils ne sont important pour un conducteur que parce qu'ils lui apprennent de ce que les autres conducteurs (et éventuellement la police) reçoivent comme signaux.

Le modèle approprié pour traîter des questions de valeur sociale de l'information est celui proposé par Aumann [Aum74] d'équilibres corrélés. Dans ce modèle, les états de la nature sont complètement connus des joueurs. Cependant, des signaux peuvent servir de mécanismes sociaux de corrélation entre eux. On parlera de structure de corrélation pour désigner les structures d'information lorsqu'il n'y a pas d'incertitude sur l'état de la nature.

L'article Gossner [Gos00] compare les structures de corrélation entre elles en utilisant une relation liée à l'information d'une part, et selon leurs effets stratégiques induits dans les jeux d'autre part. Le résultat principal est l'équivalence entre ces deux définitions.

Exemple 8 *Considérons le jeu suivant dit de la "bataille des sexes". Les deux joueurs doivent se mettre d'accord sur quelle musique écouter ensemble. Le joueur 1 préfère écouter Albinoni (A), et le jouer 2 préfère écouter Brahms (B). Si les deux joueurs se mettent d'accord ((A, A) ou (B, B)), ils mettent la musique en question et les paiements sont de 2 pour celui qui écoute sa musique préférée et de 1 pour l'autre joueur. S'ils ne se mettent pas d'accord ((A, B) ou (B, A)), ils ne mettent pas de musique et les paiements sont de 0 chacun. Le tableau des paiements est donc le suivant :*

	A	B
A	$2,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,2$

Bataille des sexes

Afin de trouver un accord équitable, les deux joueurs peuvent se baser sur le tirage à pile ou face d'une pièce de monnaie. Un tel tirage peut être représenté par un tableau tel que le suivant, où chaque ligne représente un signal pour le joueur 1, chaque colonne représente un signal pour le joueur 2, et la case contient la probabilité que la paire de signaux soit réalisée :

	Pile	*Face*
Pile	$\frac{1}{2}$	0
Face	0	$\frac{1}{2}$

Pile ou face

Avec probabilité $\frac{1}{2}$, les deux joueurs observent Pile, et avec probabilité $\frac{1}{2}$, ils observent tous deux Face.

La structure de corrélation et le jeu de la bataille des sexes induisent un jeu dans lequel la pièce de monnaie est tirée, puis chacun des joueurs choisit A ou B en fonction du résultat de la pièce. Dans ce jeu, chaque joueur a 4 stratégies (un choix – A ou B – pour chacun des résultats – Pile ou Face).

Si l'on représente par AA la stratégie qui joue toujours A, AB celle qui joue A si Pile est tiré et B si Face est tiré, et ainsi de suite, le tableau des paiements du jeu étendu est le suivant :

	AA	AB	BA	BB
AA	$2, 1$	$1, \frac{1}{2}$	$1, \frac{1}{2}$	$0, 0$
AB	$1, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$0, 0$	$\frac{1}{2}, 1$
BA	$1, \frac{1}{2}$	$0, 0$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, 1$
BB	$0, 0$	$\frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{2}, 1$	$1, 2$

Bataille des sexes avec Pile ou face

Dans ce jeu étendu, utiliser AB pour chacun des joueurs, qui veut dire accepter Albinoni si Pile est tiré, et Brahms si face est tiré, constitue un accord stable (équilibre de Nash). En effet, si Pile est tiré, chaque joueur, anticipant que l'autre va jouer A, préfère jouer A, et si Face est tiré, chacun préfère jouer B en anticipant que l'autre va faire de même. Ces stratégies permettent d'obtenir un paiement moyen de $\frac{3}{2}$ chacun, ce qui n'était pas possible sans la pièce de monnaie. Si les joueurs suivent tous deux AB, la probabilité que les deux jouent A, ou que les deux jouent B, est de $\frac{1}{2}$, ainsi que la distribution induite est :

	A	B
A	$\frac{1}{2}$	0
B	0	$\frac{1}{2}$

Distribution induite

Supposons maintenant que les joueurs n'ont pas de pièce de monnaie à leur disposition, mais peuvent observer le résultat d'un dé à six faces. La structure de corrélation correspondante se représente par le tableau de probabilité de paires de signaux :

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$

Dé à six faces

Nous n'avons pas ici l'espace nécessaire à l'écriture du tableau de paiements du jeu de la bataille des sexes lorsque les joueurs observent le résultat d'un dé à six faces (il y aurait $2^6 = 64$ *lignes et autant de colonnes, soit* 4096 *cases).*

Dans le jeu de la bataille des sexes étendu par le dé à six faces, considérons les stratégies des joueurs qui sont "jouer A pour les valeurs 1,2,3 du dé, et B pour les autres valeurs". Pour les mêmes raisons que dans le cas de la pièce de monnaie, ces stratégies forment un accord stable. La distribution induite sur les paires d'actions dans le jeu de la bataille des sexes est la même que pour la pièce de monnaie.

Il y a deux manières de comprendre pourquoi le dé à six faces permet d'induire la même distribution sur les actions des joueurs que la pièce de monnaie. La première consiste à, comme nous l'avons fait, chercher des stratégies dans le jeu étendu par le dé à six faces et voir qu'elles constituent un accord stable induisant la distribution souhaitée.

La deuxième voie consiste à comparer directement les deux structures de corrélation. Supposons que les joueurs, avant de tirer le dé à six faces, se mettent d'accord sur l'interprétation suivante du résultat : "les chiffres de 1 à 3 sont interprétés comme Pile, les autres comme Face". Évidemment, si chaque joueur suppose que l'autre n'utilisera par la suite que *cette nouvelle information (Pile ou Face), et non pas le tirage original du dé à six faces, l'information de savoir si ce tirage valait 1, 2 ou 3 est indifférent car les trois possibilités conduisent à la même interprétation par l'autre joueur (Pile dans ce cas).*

En suivant cette deuxième voie, nous comparons directement le dé à six faces à la pièce de monnaie, sans faire intervenir de jeu extérieur*. Le fait que le dé permette de générer toutes les distributions permises par la pièce, indépendamment du jeu considéré, se déduit d'une comparaison purement informationnelle entre les deux structures de corrélation.*

Par conséquent, nous voyons qu'un dé à six faces peut toujours remplacer une pièce de monnaie. Le contraire n'étant pas vrai, on peut dire que le dé à six faces offre des possibilités plus riches que la pièce de monnaie. Dans la terminologie de [Gos00], on dit que le dé à six faces est une structure de corrélation plus riche que la pièce de monnaie. Une méthode pour voir que le dé est plus riche que la pièce est de transformer les signaux 1,2,3 du dé en Pile, et les signaux 4,5,6 en Face. Cette dernière méthode ne fait intervenir que l'information dans les structures de corrélation.

La comparaison du dé à six faces avec la pièce de monnaie est rendue particulièrement simple par le fait que, dans ces deux structures de corrélation, les joueurs reçoivent des signaux identiques. En règle générale, des joueurs différents peuvent observer des signaux différents, et les signaux d'un des joueurs peuvent ne pas révéler les signaux des autres. La logique de la comparaison des structures de corrélation se généralise à ce cadre, comme dans l'exemple suivant :

Exemple 9 *On considère maintenant le "jeu des chauffards", inspiré du film de Nicholas Ray intitulé "La fureur de vivre" ("Rebel without a cause") : deux conducteurs arrivent à un carrefour par des chemins différents, et peuvent soit foncer* (F)*, soit conduire prudemment* (P)*. Il vaut mieux se comporter prudemment face à un conducteur qui fonce, car on évite ainsi l'accident. D'un autre côté, face à un joueur prudent chacun préfère foncer pour aller plus vite. Les deux joueurs sont plus satisfaits si les deux se comportent prudemment plutôt que si les deux foncent. La matrice de paiements du jeu est la suivante :*

	P	F
P	$6,6$	$2,7$
F	$7,2$	$0,0$

Jeu des chauffards

Comme face à un joueur prudent, l'autre préfère foncer, il semblerait à première vue impossible d'empêcher au moins un des joueurs de foncer. Un mécanisme tel que la pièce de monnaie permettrait à chaque joueur d'être soit prudent, soit de foncer avec probabilités $\frac{1}{2}$ *chacune, et de dériver un paiement moyen de* $\frac{9}{2}$*. Or, le paiement le meilleur (en somme) est réalisé lorsque les deux joueurs sont prudents.*

On propose d'installer au carrefour un dispositif de signalisation coloré aléatoire (ou variant selon le temps) selon lequel chaque joueur observe soit un feu vert (V*), soit un feu rouge (*R*). Un tiers du temps, le feu du joueur 1 est rouge, et celui du joueur 2 est vert, un autre tiers du temps le feu du joueur 1 est vert, et celui du joueur 2 est rouge, et le reste du temps les deux feux sont rouges. Les probabilités des signaux selon cette structure de corrélation sont les suivantes :*

	R	V
R	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
V	$\frac{1}{3}$	0

Signaux colorés

En particulier, si un joueur observe un feu vert, il est certain que l'autre observe un feu rouge. Si un joueur observe un feu rouge, il ne sait pas si l'autre observe un feu vert ou rouge, et accorde une probabilité $\frac{1}{2}$ à ces deux possibilités.

Considérons les stratégies dans le jeu des chauffards étendu par la structure de corrélation du dispositif de signalisation qui consistent en foncer si le signal est vert, et être prudent si le signal est rouge.

Supposons que la norme sociale soit de suivre ces stratégies, et plaçons nous dans la situation d'un joueur observant un signal vert. Alors ce joueur se dira qu'à coup sûr l'autre observe un signal rouge et va être prudent, ses incitations sont donc de foncer. Un joueur observant un signal rouge anticipera que l'autre joueur pourra soit foncer, soit être prudent, avec des probabilités de $\frac{1}{2}$ pour chacune des éventualités. Foncer donne un gain moyen de $\frac{1}{2}(7+0)$ et être prudent un gain moyen de $\frac{1}{2}(6+2)$, et il vaut donc mieux être prudent.

La norme sociale considérée est bien stable au sens de l'équilibre de Nash, dans le sens qu'aucun joueur n'a intérêt à en dévier.

La distribution induite par ces stratégies sur les actions des joueurs est :

	P	F
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
F	$\frac{1}{3}$	0

Distribution induite

En particulier, avec probabilité $\frac{1}{3}$, les deux joueurs sont prudents.

On suppose maintenant une version du dispositif de signalisation, dans laquelle les signaux peuvent prendre une forme soit de carreau ($\diamondsuit$), soit de cœur ($\heartsuit$), soit triangulaire ($\triangle$). La distribution des signaux est :

	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\diamondsuit$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$\heartsuit$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\triangle$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Signaux avec forme

De la même manière que les stratégies considérées avec signaux colorés formaient un accord stable, les stratégies consistant à conduire prudemment lorsqu'on observe un signal $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$ et foncer lorsqu'on observe $\triangle$ forment une norme sociale stable. En effet, un joueur observant $\triangle$ anticipe que l'autre joueur, ayant reçu soit $\diamondsuit$, soit $\heartsuit$, va choisir P, préfère foncer. Un joueur observant $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$ assigne des probabilités égales aux possibilités que l'autre joueur ait reçu le même signal, ou $\triangle$, donc des probabilités égales que l'autre joueur fonce ou soit prudent, et préfère donc être prudent.

La distribution induite sur les actions dans le jeu des chauffards est la même qu'avec les signaux colorés.

Le fait que la structure de corrélation des signaux avec formes permette d'engendrer les distributions permises par la structure de corrélation des signaux colorés ne dépend pas du jeu étudié, ni de l'équilibre particulier considéré.

Pour comprendre cette propriété, supposons que les joueurs reçoivent des signaux avec forme, et que l'un d'entre eux, le joueur 1, lorsqu'il reçoit $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$, "oublie" si le signal particulier était $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$ (mais retient que le signal était l'un des deux, il se souvient alors de $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$). Alors, du point de vue de l'autre joueur, joueur 2, le signal $\diamondsuit$, comme le signal $\heartsuit$, signifie que l'autre joueur a une probabilité $\frac{1}{2}$ de se souvenir de $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$, et $\frac{1}{2}$ de se souvenir de $\triangle$. Les deux signaux $\diamondsuit$ et $\heartsuit$ sont maintenant équivalents car ils donnent la même information sur ce que dont le joueur 1 se souvient. Par conséquent, si l'un des joueurs ne distingue pas entre $\diamondsuit$ et $\heartsuit$, l'autre joueur n'a pas intérêt non plus à distinguer entre ces deux signaux. Il y a donc une forme d'équilibre à ce que les deux joueurs ignorent simultanément la distinction entre $\diamondsuit$ et $\heartsuit$. Si les deux joueurs font ainsi, la matrice de probabilités des nouveaux signaux est :

	$\{\diamondsuit, \heartsuit\}$	$\triangle$
$\{\diamondsuit, \heartsuit\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\triangle$	$\frac{1}{3}$	0

Distribution de signaux avec "oubli"

La distribution de signaux ainsi obtenue est la même qu'avec les signaux colorés. Par conséquent, les deux joueurs ont toujours la possibilité d'"oublier" l'information $\diamondsuit, \heartsuit$, et de se comporter comme si leur information provenait des signaux colorés (en associant Rouge à $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$, et Vert à $\triangle$).

Dans l'article [Gos00], je propose deux méthodes pour comparer des structures de corrélation.

Selon la première méthode, chaque structure de corrélation induit dans chaque jeu des distributions appelées distributions d'équilibres corrélé du jeu induites par la structure de corrélation (voir Aumann [Aum74]). Lorsqu'une structure de corrélation induit plus de distributions d'équilibres corrélés qu'une autre dans tous les jeux, on dit que la première structure de corrélation est plus riche que la seconde.

Selon la deuxième méthode, les joueurs peuvent, lorsqu'il reçoivent de l'information d'une structure de corrélation, "oublier" une partie de cette information. Je définis une transformation fidèle d'une structure de corrélation vers une autre comme une famille de fonctions d'oubli pour tous les joueurs telles que, si tous les joueurs sauf le joueur j utilisent leurs fonctions d'oubli, il n'y a aucune perte pour le joueur j à utiliser sa fonction d'oubli.

J'ai montré qu'une structure d'information est plus riche qu'une autre si et seulement si il existe une transformation fidèle de la première vers la seconde.

Les transformations fidèles sont une forme d'équilibre –ou de convention sociale– quand à l'information retenue comme étant importante par les joueurs. Dans une société, il existe souvent des normes quand à l'information qui conditionne le comportement de ses membres. Par exemple, le racisme est une forme de convention qui "refuse" d'oublier que la couleur de peau d'un individu n'est pas informative. Dans une société, chaque individu a intérêt à considérer l'information donnée par la couleur de la peau comme importante si les autres individus de la société font de même.

2.9 Apprentissage stratégique

La question de la valeur de l'information est très liée à celle des incitations des agents à acquérir de l'information (investissement dans des activités de recherche). De fait, la compréhension des incitations aux activités de recherche est une des motivations fondamentales des études de la valeur de l'information dues à Arrow [Arr62] et Hirshleifer [Hir71] par exemple. Certains modèles représentent explicitement les possibilités des agents d'acquérir de l'information, et permettent ainsi de caractériser les niveaux d'apprentissage optimaux, ou à l'équilibre.

Dans le cadre à un joueur, une littérature importante de la théorie de la décision et des statistiques est consacrée à la question de l'apprentissage optimal (voir le livre de référence de Berry et Fridstet [BF85]).

Un exemple de problème de décision faisant intervenir de l'incertitude et de l'apprentissage est le cas d'un nouveau traitement médical pouvant guérir une maladie. Si l'on n'est pas certain de l'efficacité du nouveau traitement, faut-il cependant l'administrer à des patients ? D'un autre côté, à moins de tester le traitement sur un certain nombre de patients, on ne pourra jamais apprendre sa qualité. Ne pas l'administrer fait donc encourir le risque de ne jamais apprendre que ce traitement pourrait sauver des vies.

Le résultat central de Gittins et Jones [GJ74] permet, pour toute une classe de problèmes d'apprentissage à un joueur, de déterminer une stratégie d'apprentissage optimal qui réussisse le meilleur compromis entre acquisition d'information et maximisation des paiements présents.

Pourquoi l'acquisition d'information est-elle coûteuse ? Car les joueurs sont impatients, s'il faut passer du temps à rechercher l'information et que ce temps donne des mauvais paiements, ces mauvais paiements entrent dans l'évaluation globale du paiement de la stratégie. De plus, une même action jouée plusieurs fois ne donne en général pas toujours le même paiement. Il est en effet naturel de supposer que le paiement dépend à la fois de l'action et de facteurs exogènes aléatoires. Par exemple, un même traîtement médical ne donnera pas les mêmes résultats sur tous les patients. Ces phénomènes exogènes sont représentés par des paiements aléatoires dont la distribution dépend de l'action choisie et de l'état de la nature. Une conséquence des paiements aléatoires est que l'apprentissage est plus difficile, plus long, et par conséquent plus coûteux si le joueur est impatient.

Enfin, et même si ce genre de phénomène n'est pas toujours représenté dans les modèles d'acquisition d'information, il faut signaler qu'une information valable à un moment donné ne reste pas forcément vraie éternellement. Par exemple, connaître la qualité d'un restaurant à une date donnée ne donne qu'une information partielle sur la qualité du même restaurant 20 ans après. Ce phénomène, que l'on pourrait représenter par un état de la nature évoluant au cours du temps, augmente le coût de l'acquisition de l'information car il est en permanence nécessaire de rénover l'information que l'on a sur les paiements associés aux actions. La même information ne peut plus être sue "une fois pour toutes". Ceci conduit à un coût de l'acquisition de l'information même sans impatience, car une proportion non négligeable du temps doit-être être en permanence consacrée à l'acquisition de l'information.

Dans les problèmes à un joueur, si l'état de la nature n'évolue pas au cours du temps, si les paiements sont déterministes (non aléatoires), et si le joueur n'est pas impatient, l'apprentissage de l'information n'a aucun coût, et une meilleure stratégie consiste à essayer chaque action possible pour apprendre le paiement associé, puis à jouer indéfiniment l'action donnant le meilleur paiement.

Nous allons voir que ce résultat très simple ne s'étend pas au cadre à plus de un agent. L'exemple suivant est tiré de l'article écrit en collaboration avec Nicolas Vieille [GV03].

Exemple 10 *On a deux joueurs, joueur 1 et joueur 2. Chaque joueur peut décider à chaque moment du jeu d'être soit pacifique (P), soit agressif (A). Si les deux joueurs sont pacifiques, ils obtiennent chacun un paiement de 1. Si l'un des deux au moins est agressif, alors le plus fort des deux remporte un paiement de 2, et le plus faible un paiement de -2. Au début du jeu, les probabilités que chacun des joueurs soit le plus fort sont égales. Un joueur plus fort à une étape donnée est aussi le plus fort pour toutes les étapes. On a donc les matrices de paiements suivantes :*

	P	A
P	$1, 1$	$2, -2$
A	$2, -2$	$2, -2$

Joueur 1 le plus fort

	P	A
P	$1, 1$	$-2, 2$
A	$-2, 2$	$-2, 2$

Joueur 2 le plus fort

Si aucun joueur n'a été agressif dans le passé, les joueurs ne savent pas lequel des deux joueurs est le plus fort. Dans le cas contraire, les joueurs le savent de manière certaine et définitive.

Supposons que les joueurs aient appris que le le joueur 1 est le plus fort. Alors, le joueur 1 obtient son meilleur paiement de 2 à chaque étape en étant toujours agressif. Le joueur 2 obtient alors -2 à chaque étape.

Dans le cas similaire où les joueurs savent que le joueur 2 est le plus fort, les paiements résultant sont de -2 pour le joueur 1, et de 2 pour le joueur 2.

Par conséquent, en apprenant lequel des deux joueurs est le plus fort, chacun des deux a un paiement de -2 ou de 2 avec des probabilités égales par la suite, soit un paiement espéré de 0.

Si, en revanche, aucun joueur n'est jamais agressif, chacun obtient un paiement de 1 à chaque étape. Aucun des deux joueurs ne souhaite apprendre qui est le plus fort car il encourt d'apprendre qu'il est le plus faible des deux.

Dans l'article [GV03], nous étudions les jeux répétés à information incomplète et symétrique sur les paiements (tous les joueurs ont la même information) dans lesquels, à chaque étape, les joueurs observent les actions jouées et les paiements résultant de ces actions.

Dans ce modèle, l'apprentissage n'est pas coûteux car les joueurs ne sont pas impatients, l'état de la nature n'évolue pas au cours du temps, et les paiements sont déterministes.

Nous montrons qu'il existe toujours des équilibres dans lesquels les joueurs apprennent parfaitement quelles sont les fonctions de paiements.

Il existe aussi d'autres équilibres dans lesquels l'information acquise par les agents sur la fonction de paiements n'est que partielle. L'exemple ci dessus montre que l'apprentissage partiel peut conduire à de meilleurs paiements que l'apprentissage complet. Nous caractérisons les équilibres à apprentissage partiel par une phase d'apprentissage de durée finie, suivie par un phase infinie de jeu sans apprentissage.

Bibliographie

[Arr62] K. Arrow. Economic welfare and the allocation of resources for invention. In *The rate and direction of economic activity : economic and social factors*. Universities–Nat. Bur. Econ. Res. Conference Series, Princeton, 1962.

[AS89] R. J. Aumann and S. Sorin. Cooperation and bounded recall. *Games and Economic Behavior*, 1 :5–39, 1989.

[Aum74] R.J. Aumann. Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1 :67–95, 1974.

[BF85] D. A. Berry and B. Fristedt. *Bandit problems. Sequential allocation of experiments*. Chapman and Hall, London, 1985.

[BGSZ03] B. Bassan, O. Gossner, M. Scarsini, and S. Zamir. Positive value of information in games. *International Journal of Game Theory*, 32 :17–31, 2003.

[Bla51] D. Blackwell. Comparison of experiments. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 93–102. University of California Press, 1951.

[Bla53] D. Blackwell. Equivalent comparison of experiments. *Annals of Mathematical Statistics*, 24 :265–272, 1953.

[Bor14] E. Borel. *Le hasard*. Alcan, Paris, 1914.

[Bor21] E. Borel. La theorie du jeu et les equations integrales a noyan symetrique gauche. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 173 :1304–1308, 1921.

[Cré82] J. Crémer. A simple proof of Blackwell's "comparison of experiments" theorem. *Journal of Economic Theory*, 27 :439–443, 1982.

[For86] F. Forges. An approach to communication equilibria. *Econometrica*, 54 :1375–1385, 1986.

[GJ74] J.C. Gittins and D.M. Jones. A dynamic allocation index for the sequential design of experiments. In J. Gani, editor, *Progress in Statistics*, pages 241–266. North-Holland, Amsterdam, NL, 1974.

[GM01] O. Gossner and J.-F. Mertens. The value of information in zero-sum games. mimeo, 2001.

[Gos00] O. Gossner. Comparison of information structures. *Games and Economic Behavior*, 30 :44–63, 2000.

[Gos04] O. Gossner. Ability and knowledge. mimeo, 2004.

[GV03] O. Gossner and N. Vieille. Strategic learning in games with symmetric information. *Games and Economic Behavior*, 42 :25–47, 2003.

[Har68] Harsanyi. Games with incomplete information played by 'bayesian' players, parts I, II, and III. *Management Science*, 14 :159–182, 320–334, and 486–502, 1967/68.

[Hir71] J. Hirshleifer. The private and social value of information and the reward to inventive activity. *American Ecomomic Review*, 61 :561–574, 1971.

[KTZ90] M. I. Kamien, Y. Tauman, and S. Zamir. On the value of information in a strategic conflict. *Games and Economic Behavior*, 2 :129–153, 1990.

[MZ85] J.-F. Mertens and S. Zamir. Formulation of bayesian analysis for games with incomplete information. *International Journal of Game Theory*, 14 :1–29, 1985.

[Ney91] A. Neyman. The positive value of information. *Games and Economic Behavior*, 3 :350–355, 1991.

[Rad93] R. Radner. The organization of decentralized information processing. *Econometrica*, 61 :1109–1146, 1993.

[vN28] J. von Neumann. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100 :295–320, 1928.

[vNM44] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944.